Taller : Una construcción de la integral de Riemann

2011-I — Florent Schaffhauser

Se propone construir el espacio de funciones Riemann-integrables por el mismo método que vimos en la clase pasada para construir el espacio de funciones reguladas.
Para cualquier $f \in \mathcal{F}([a;b];E)$, se define el conjunto

$$\mathcal{M}(f) = \left\{ \mu \in \mathcal{E}sc([a;b];\mathbb{R}) \mid \forall t \in [a;b], \mu(t) \geq \|f(t)\|_E \right\}.$$

Se podrá observar que $\mathcal{M}(f) \neq \emptyset$ si f es acotada pero que $\mathcal{M}(f)$ puede ser vacío. Se define a continuación

$$P_E(f) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(f)} \left\{ \int_a^b \mu(t)\, dt \right\}.$$

Si $\mu \in \mathcal{M}(f)$, entonces $\mu \geq 0$ luego $P_E(f) \geq 0$ (y posiblemente $P_E(f) = +\infty$). Si $\mathcal{M}(f) = \emptyset$, entonces $P_E(f) = \inf \emptyset = +\infty$.

1. Calcular $P_E(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{E}sc([a;b];E)$.
2. Mostrar que la aplicación

$$P_E : \mathcal{F}([a;b];E) \longrightarrow [0;+\infty]$$

es una semi-norma sobre $\mathcal{F}([a;b];E)$.

Definición 1. *Sea $\mathcal{RI}([a;b];E)$, o simplemente $\mathcal{RI}$ si no hay confusión posible, la clausura de $\mathcal{E}sc([a;b];E)$ en $\mathcal{F}([a;b];E)$ por la topología definida por la semi-norma P_E. Los elementos de $\mathcal{RI}([a;b];E)$ se llaman **funciones Riemann-integrables** sobre $[a;b]$.*

Por definición, una función es Riemann-integrable si y sólo si es límite de funciones en escalera *por la topología definida por la semi-norma P_E*. El siguiente punto da una caracterización de las funciones Riemann-integrables que muy a menudo sirve como definición de las mismas.

3. Sea $f \in \mathcal{F}([a;b];E)$. Mostrar que f es Riemann-integrable si y sólo si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existen funciones en escalera $\varphi \in \mathcal{E}sc([a;b];E)$ y $\mu \in \mathcal{E}sc([a;b];\mathbb{R})$ tal que

$$\forall t \in [a;b], \|f(t) - \varphi(t)\|_E \leq \mu(t)$$

y

$$\int_a^b \mu(t)\, dt < \varepsilon.$$

4. Mostrar que toda función Riemann-integrable es acotada sobre $[a;b]$.
5. Mostrar que toda función regulada es Riemann-integrable.

La inclusión $\mathcal{R}eg \subset \mathcal{RI}$ es estricta. Por ejemplo, la función $t \mapsto \sin\frac{1}{t}$ si $t \neq 0$ y 0 si $t = 0$ es Riemann-integrable sobre $[0;1]$ pero no es regulada (aunque no es tan fácil demostrarlo). El siguiente punto dice que, aunque cambió la topología sobre $\mathcal{E}sc$ a una topología menos fina, la integral de funciones en escalera sigue siendo continua.

6. Mostrar que la integral de funciones en escalera

$$I : (\mathcal{E}sc([a;b];E), P_E) \longrightarrow \big(E, \|.\|_E\big)$$

es una aplicación lineal continua (luego uniformemente continua).

Definición 2. *Se denota* Int *la única extensión continua de $I : \mathcal{E}sc \to E$ a $\mathcal{RI} = \overline{\mathcal{E}sc}^{(P_E)}$. Para una función $f \in \mathcal{RI}([a;b];E)$, la cantidad* $\mathrm{Int}(f) \in E$ *se denota $\int_a^b f(t)\, dt$ y se llama la **integral de Riemann de la función (Riemann-integrable) f**.*

7. Mostrar que si f es Riemann-integrable, entonces
$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\|_E \leq P_E(f).$$
8. Mostrar que si $f : [a;b] \to E$ es Riemann-integrable, entonces $\|f\|_E : [a;b] \to \mathbb{R}$ es Riemann-integrable y que
$$P_E(f) = \int_a^b \|f(t)\|_E \; dt.$$
Deducir de todo lo anterior que
$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E \; dt \leq (b-a)\,\|f\|_\infty \, .$$
9. Mostrar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una succesión de funciones Riemann-integrables que converge *uniformemente* hacia f sobre $[a;b]$ entonces f es Riemann-integrable sobre $[a;b]$ y
$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$