Solución Taller

2011-I FLORENT SCHAFFHAUSER

1. Si φ es una función en escalera, $\|\varphi\|_E$ también y
$$P_E(\varphi) = \int_a^b \|\varphi(t)\|_E \, dt$$
por definición de P_E (en este caso, el ínfimo que define $P_E(\varphi)$ es un mínimo).
2. Es fácil ver que $P_E(\lambda f) = |\lambda| P_E(f)$ para cualquier $f \in \mathcal{F}([a;b];E)$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$ (el cuerpo de base de E). Mostremos la desigualdad triangular
$$P_E(f+g) \leq P_E(f) + P_E(g).$$
Si $\mathcal{M}(f) = \emptyset$ o $\mathcal{M}(g) = \emptyset$, se cumple la desigualdad porque $P_E(f) = +\infty$ o $P_E(g) = +\infty$. Supongamos, entonces, que $\mathcal{M}(f) \neq \emptyset$ y $\mathcal{M}(g) \neq \emptyset$ y sea $\varepsilon > 0$. Por definición del ínfimo, existen $\mu \in \mathcal{M}(f)$ y $\nu \in \mathcal{M}(g)$ tales que
$$\int_a^b \mu(t)\, dt < P_E(f) + \varepsilon$$
y
$$\int_a^b \nu(t)\, dt < P_E(g) + \varepsilon.$$
Pero
$$\|f(t) + g(t)\|_E \leq \|f(t)\|_E + \|g(t)\|_E \leq \mu(t) + \nu(t)$$
luego $(\mu + \nu) \in \mathcal{M}(f+g)$ y esto implica
$$P_E(f+g) \leq \int_a^b (\mu+\nu)(t)\, dt \leq P_E(f) + P_E(g) + 2\varepsilon.$$
Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, esto implica $P_E(f+g) \leq P_E(f) + P_E(g)$.
3. Sea f Riemann-integrable y sea $\varepsilon > 0$. Por definición de la integrabilidad, existe $\varphi \in \mathcal{E}sc([a;b];E)$ tal que $P_E(f - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, por definición de P_E, existe $\mu \in \mathcal{E}sc([a;b];\mathbb{R})$ tal que $\mu(t) \geq \sup_{t\in[a;b]} \|f(t) - \varphi(t)\|_E$ y
$$\int_a^b \mu(t)\, dt < P_E(f-\varphi) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
La recíproca se demuestra de manera similar.
4. Sea $f \in \mathcal{RI}([a;b];E)$. Por la pregunta anterior, existe $\varphi \in \mathcal{E}sc([a;b];E)$ y $\mu \in \mathcal{E}sc([a;b];\mathbb{R})$ tales que
$$\sup_{t\in[a;b]} \|f(t) - \varphi(t)\|_E \leq \mu(t)$$
y $\int_a^b \mu(t)\, dt \leq 1$. Luego, para cualquier $t \in [a;b]$,
$$\|f(t)\|_E \leq \|f(t) - \varphi(t)\|_E + \|\varphi(t)\|_E \leq \mu(t) + \|\varphi(t)\|_E\,.$$
Al ser acotada cualquier funcion en escalera, f también lo es.
5. Es suficiente demostrar que un límite uniforme de funciones en escalera también es límite de funciones en escalera *por la topología definida por la semi-norma P_E*. Incluso es suficiente demostrar que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una succesión de funciones en escalera tal que $\|f - \varphi_n\|_\infty \to_{n\to+\infty} 0$, entonces $P_E(f - \varphi_n) \to_{n\to+\infty} 0$ (la *misma* succesión converge en las dos topologías). Y para eso es suficiente demostrar que

si $B_{P_E}(f,\eta)$ es una bola abierta para P_E, entonces $B_{P_E}(f,\eta)$ contiene una bola $B_\infty(f,\varepsilon)$ abierta para $\|\cdot\|_\infty$).

$$\begin{array}{rcl} B_\infty(f,\varepsilon) & = & \{g \in \mathcal{F}([a;b];E) \mid \|g(t)-f(t)\|_\infty < \varepsilon\} \\ & = & \{g \in \mathcal{F}([a;b];E) \mid \sup\limits_{t\in[a;b]} \|g(t)-f(t)\|_E < \varepsilon\}. \\ B_{P_E}(f,\eta) & = & \{g \in \mathcal{F}([a;b];E) \mid P_E(g-f) < \eta\}. \end{array}$$

Para η fijo, sea $\varepsilon = \frac{\eta}{2(b-a)}$ y sea $g \in B_\infty(f,\varepsilon)$. Definamos $\mu(t) = \varepsilon$ para cualquier $t \in [a;b]$. Entonces μ es en escalera, $\mu(t) \geq \sup_{t\in[a;b]} \|g(t)-f(t)\|_E$ para cualquier t y $\int_a^b \mu(t)\,dt = \frac{\eta}{2} < \eta$. Luego $g \in B_{P_E}(f,\eta)$, por lo cual $B_\infty(f,\varepsilon) \subset B_{P_E}(f,\eta)$.

6. Vimos en clase que I era lineal. Mostremos que I es continua por la topología definida por P_E. Por la pregunta 1, tenemos

$$\|I(\varphi)\|_E = \left\|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b \|\varphi(t)\|_E\,dt = P_E(\varphi)$$

y esto demuestra la continuidad de la aplicación lineal I.

7. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succesión de funciones en escalera tal que $P_E(f-\varphi_n) \to_{n\to+\infty} 0$. Entonces, por continuidad de P_E, tenemos que $P_E(\varphi_n) \to_{n\to+\infty} P_E(f)$. Además, al ser en escalera cada φ_n, tenemos

$$\left\|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b \|\varphi_n(t)\|_E\,dt = P_E(\varphi_n).$$

Pero, por definición de la integral de Riemann,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\,dt.$$

Luego, por continuidad de $\|\cdot\|_E$,

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E = \lim_{n\to+\infty} \left\|\int_a^b \varphi_n(t)\,dt\right\|_E \leq \lim_{n\to+\infty} P_E(\varphi_n) = P_E(f).$$

8. Es fácil ver que si $P_E(f-\varphi_n) \to_{n\to+\infty} 0$ entonces $P_\mathbb{R}(\|f\|_E - \|\varphi_n\|_E) \to_{n\to+\infty} 0$, donde $P_\mathbb{R}$ es la semi-norma sobre $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$. Luego $\|f\|_E$ es Riemann-integrable sobre $[a;b]$ y

$$\int_a^b \|f(t)\|_E\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \|\varphi_n(t)\|_E\,dt.$$

Pero por el punto anterior

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \|\varphi_n(t)\|_E\,dt = P_E(f),$$

luego

$$\int_a^b \|f(t)\|_E\,dt = P_E(f)$$

y, aún por el punto anterior,

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\|_E \leq \int_a^b \|f(t)\|_E\,dt.$$

Al ser acotada cualquier función Riemann-integrable, se puede considerar la función en escalera constante igual a $\|f\|_\infty$ y se obtiene

$$\int_a^b \|f(t)\|_E\,dt = P_E(f) \leq (b-a)\,\|f\|_\infty.$$

9. Se demuestra, como en el punto 5, que si una succesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge hacia f en la topologá uniforme, también converge en la topología definida por P_E. Luego un límite uniforme f de funciones Riemann-integrables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es un límite en la topología definida por P_E. Al ser cerrado $\mathcal{RI}([a;b];E)$ por la topología definida por P_E (es una clausura), ese límite es Riemann-integrable. Ya que la integral de funciones Riemann-integrables es continua (por construcción), se tiene
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt.$$