Solución Tarea

2011-I FLORENT SCHAFFHAUSER

Se denota λ la medida de lebesgue sobre $\mathbb{R}$. El objetivo del problema es demostrar el siguiente teorema, que se debe a Egorov.

1. La función f es límite simple de funciones medibles, por lo que f es medible.

2.

- **a.** E_k^n es Lebesgue-medible pues es la preimagen del subconjunto medible $]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}[$ por la función medible $f-f_j$.
- **b.** Por definición de E_k^n, $E_k^n \subset E_{k+1}^n$.
- **c.** Sea $n>0$ y $x\in E$. Ya que $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, existe un $k\in\mathbb{N}$ tal que $|f(x)-f_j(x)|<\frac{1}{n}$ para cualquier $j>k$. Luego $x\in E_k^n$. Luego, para n fijo, $\cup_{k=1}^{+\infty}E_k^n = E$.

3. Sea $n>0$. Por la pregunta anterior, se tiene que $\lim_{k\to+\infty}\lambda(E_k^n)=\lambda(E)$. Ya que $\lambda(E)<+\infty$, esto implica que $\lim_{k\to+\infty}\lambda(E\setminus E_k^n)=0$. Luego,

$$\forall n\geq 1, \exists k_n\geq 1 \mid \lambda(E\setminus E_{k_n}^n)<\frac{1}{2^n}\cdot$$

4. B_ε es medible como intersección numerable de medibles y $E\setminus B_\varepsilon \subset \cup_{m=N_\varepsilon}^{+\infty}E\setminus E_{k_m}^m$, luego

$$\lambda(E\setminus B_\varepsilon)\leq \sum_{m=N_\varepsilon}^{+\infty}\lambda(E\setminus E_{k_m}^m) < \sum_{m=N_\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{2^m}<\frac{\varepsilon}{2},$$

donde la última desigualdad sigue de la definición de N_ε.

5. Sea $n\geq N_\varepsilon$, $x\in B_\varepsilon$ y $j>k_n$. Ya que $B_\varepsilon\subset E_{k_n}^n$, entonces $j>k_n$ implica $f(x)-f_j(x)|<\frac{1}{n}$. Pero $\frac{1}{n}<\delta$, luego

$$\forall j>k_n, \forall x\in B_\varepsilon, |f(x)-f_j(x)|<\delta.$$

6. B_ε es Lebesgue-medible, luego existe un cerrado A_ε de $\mathbb{R}$, incluido en $\subset B_\varepsilon$, tal que

$$\lambda(B_\varepsilon\setminus A_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

7. Se tiene

$$\lambda(E\setminus A_\varepsilon)=\lambda(E\setminus B_\varepsilon)+\lambda(B_\varepsilon\setminus A_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Ya que $A_\varepsilon\subset B_\varepsilon$, se tiene, por el punto **5**, que $(f_j)_{j\geq 1}$ converge uniformemente hacia f sobre A_ε.