Solución del tercer parcial

11 DE MAYO 2011 FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio 1. Utilizando el teorema de Fubini y un cambio de variables a coordenadas polares, se obtiene :

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx\right)^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} re^{-\pi r^2}\, dr\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \left[-e^{-\pi r^2}\right]_0^{+\infty} d\theta \\ &= 1.\end{aligned}$$

Luego $\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi x^2}\, dx = \sqrt{1} = 1$.

Ejercicio 2.

a. La función f_n es Lebesgue-medible porque es continua. Ya que

$$|f_n(x)| = |\operatorname{sen} x| e^{-nx} \leq xe^{-nx}$$

sobre $[0;+\infty[$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} xe^{-nx}\, dx.$$

Integrando por partes, viene

$$\int_0^{+\infty} xe^{-nx}\, dx = \left[\frac{-xe^{-nx}}{n}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n^2}$$

luego

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

b. Por lo anterior y el teorema de Fubini, se tiene que la función

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{sen} x) e^{-nx}$$

es Lebesgue-integrable sobre $[0;+\infty[$. Ya que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\operatorname{sen} x) e^{-nx} = f(x)$$

casi en todas partes (para cualquier $x > 0$), concluimos, por Fubini, que f es Lebesgue-integrable sobre $[0;+\infty[$ y que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\, e^{-nx}\, dx$$

y una doble integración por partes muestra que

$$\int_o^{+\infty} \operatorname{sen} x\, e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n^2+1}\cdot$$

Ejercicio 3.

a. Si $f \in \mathbf{L}^p(\mu) \cap \mathbf{L}^q(\mu)$ y $r \in]p;q[$, entonces

$$|f|^r \leq |f|^p \mathbf{1}_{\{|f|\leq 1\}} + |f|^q \mathbf{1}_{\{|f|>1\}}$$

luego

$$\int_X |f|^r \, d\mu \leq \int_{|} f|^p \, d\mu + \int_X |f|^q \, d\mu < +\infty$$

luego $f \in \mathbf{L}^r(\mu)$.

b. Si $f \in \mathbf{L}^p(\mu) \cap \mathbf{L}^\infty(\mu)$ y $r \in]p;+\infty[$, entonces tenemos, μ-casi en todas partes,

$$|f|^r = |f|^p |f|^{r-p} \leq |f|^p \|f\|_{+\infty}^{r-p}.$$

Luego

$$\int_X |f|^r \, d\mu \leq \|f\|_\infty^{r-p} \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$$

luego $f \in \mathbf{L}^r(\mu)$ y

$$\|f\|_r = \left(\int_X |f|^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_p^{\frac{p}{r}}.$$

c. Tomando el límite superior sobre todos los r mayores a p en la desigualdad anterior, se obtiene

$$\limsup_{r>p} \|f\|_r \leq \limsup_{r>p} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_p^{\frac{p}{r}} = \lim_{r\to+\infty} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{r}} \|f\|_p^{\frac{p}{r}} = \|f\|_\infty.$$

d. $\|f\|_\infty$ es la cota esencial de f, luego, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\mu\big(\{x \in X \mid |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}\big) > 0.$$

Además, $|f|^r \in \mathbf{L}^1(\mu)$, luego

$$\mu\big(\{x \in X \mid |f(x)|^r \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^r\}\big) \leq \frac{1}{(\|f\|_\infty - \varepsilon)^r} \int_X |f|^r \, d\mu < +\infty.$$

e. Por lo anterior, tenemos, para cualquier $r > p$,

$$\big(\|f\|_\infty - \varepsilon\big)^r \mu(E_\varepsilon) \leq \|f\|_r^r.$$

f. Sacando la raiz r-ésima y el límite inferior sobre todos los r mayores a p en la desigualdad anterior, se obtiene, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \liminf_{r>p} \|f\|_r.$$

Al ser arbitrario ε, esto implica

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{r>p} \|f\|_r.$$

g. Por **c** y **f**, se tiene que si f no es 0 casi en todas partes, entonces

$$\liminf_{r>p} \|f\|_r = \liminf_{r>p} \|f\|_r = \|f\|_\infty,$$

en particular, restrigiéndose a los valores enteros de r, la succesión $(\|f\|_r)_{r>p}$ es convergente y

$$\lim_{r\to+\infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty.$$