Universidad de Los Andes — Medida e integración

Solución Parcial 2

13 de abril 2011 — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1.

a. La función $x \mapsto e^{-x}$ es continua sobre $[0;+\infty[$ luego es localmente Riemann-integrable sobre ese intervalo. Ya que $e^{-x} = O(\frac{1}{x^2})$, la integral $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ es absolutamente convergente. Luego, por comparación con Riemann, la función $x \mapsto e^{-x}$ es Lebesgue-integrable sobre $[0;+\infty[$.

b. Para cualquier $x \in [0;n]$,

$$\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n (\cos x)^n\, \mathbf{1}_{[0;n]}(x)\right| \quad \leq \quad \left|1-\frac{x}{n}\right|^n \quad \leq \quad e^{-x}$$

y, para cualquier $x \in]n;+\infty[$,

$$\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n (\cos x)^n\, \mathbf{1}_{[0;n]}(x)\right| \quad = \quad 0 \quad \leq \quad e^{-x}.$$

c. La función $f_n : x \mapsto (1-\frac{x}{n})^n (\cos x)^n \mathbf{1}_{[0;n]}(x)$ es medible y es dominada por $x \mapsto e^{-x}$ que es Lebesgue-integrable. Además, para cualquier

$$x \in [0;+\infty[\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{N}\},$$

$|\cos x| < 1$ luego

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$

casi en todas partes. Luego, por el teorema de convergencia dominada,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{[0;+\infty[} f_n\right) \quad = \quad \int_{[0;+\infty[} (\lim_{n\to+\infty} f_n) \quad = \quad 0.$$

Por comparación con Riemann, eso implica

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n (\cos x)^n\, dx \quad = \quad 0.$$

Ejercicio 2.

a. Notemos que la función $x \mapsto x^n(\ln x)$ es Riemann-integrable sobre $[0;1]$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Integrando por partes ($u = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $v = \ln x$), se obtiene

$$\int_0^1 x^n (\ln x)\, dx = -\frac{1}{(n+1)}^{2}.$$

b. Para cualquier $x \in]0;1[$,

$$\frac{\ln x}{x-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ln x.$$

Además, para cualquier $N \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in]0;1[$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} x^n \ln x\right| \leq \frac{|\ln x|}{1-x}.$$

La función $x \mapsto \frac{|\ln x|}{1-x}$ es continua sobre $]0;1[$ y $\int_0^1 (\ln x)\,dx$ es absolutamente convergente (pues $|\ln x| \sim (1-x)$ en 1 y $\frac{|\ln x|}{1-x} \sim |\ln x|$ en 0). Luego esa función es Lebesgue-integrable sobre $[0;1]$. Por el mismo argumento, $x \mapsto x^n(\ln x)$ es Lebesgue-integrable sobre $[0;1]$. En particular, es medible. Luego, el teorema de convergencia dominada implica

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} = \int_0^1 \left(-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(\ln x) \right) dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^n(\ln x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

Ejercicio 3.

a. Para cualquier $x \in [0;+\infty[$, la función $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-tx}f(t)$ es Lebesgue-medible. Además, para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$, la función $x \mapsto e^{-tx}f(t)$ es continua sobre $[0;+\infty[$ y

$$|e^{-tx}f(t)| \leq |f(t)|$$

con f Lebesgue-integrable. Luego, por el teorema de continuidad bajo el signo integral, la función

$$\mathcal{L}_f : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} e^{-tx}f(t)\, d\lambda(t)$$

es bien definida y continua sobre $[0;+\infty[$.

b. Para demostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}_f(x) = 0,$$

es suficiente demostrar que, para cualquier succesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales positivos que tiende a $+\infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{L}_f(x_n) = 0.$$

Para eso usaremos el teorema de convergencia dominada. Se tiene

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-tx_n}f(t) = 0$$

siempre que $t > 0$ y

$$|e^{-tx_n}f(t)| \leq |f(t)|$$

con f Lebesgue-integrable. Luego

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-tx_n}f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-tx_n}f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} 0\, dt = 0.$$

c. Para demostrar que $\mathcal{L}_f$ es derivable en $]0;+\infty[$, es suficente demostrar que es derivable en $]\alpha;+\infty[$ para cualquier $\alpha > 0$. Para cualquier $x \in]\alpha;+\infty[$, la función $t \mapsto e^{-tx}f(t)$ es Lebesgue-integrable en $]\alpha;+\infty[$ (por la pregunta **a**). Además, para cualquier $t \in \mathbb{R}_+$, la función $x \mapsto e^{-tx}f(t)$ es derivable en $]\alpha;+\infty[$ y su derivada es

$$x \longmapsto -te^{-tx}f(t).$$

Para cualquier $x \in]\alpha;+\infty[$,

$$|-te^{-tx}f(t)| \leq te^{-\alpha t}|f(t)|$$

sobre $\mathbb{R}_+$. Mostremos que

$$t \longmapsto te^{-\alpha t}|f(t)|$$

es Lebesgue-integrable sobre $\mathbb{R}_+$. Ya que $\lim_{t\to+\infty} te^{-\alpha t} = 0$, existe un $A > 0$ tal que, si $t > A$,

$$te^{-\alpha t}|f(t)| \leq |f(t)|.$$

Luego $t \mapsto te^{-\alpha t}|f(t)|$ es Lebesgue-integrable sobre $]A;+\infty[$. Ya que $t \mapsto te^{-\alpha t}|f(t)|$ es dominada por $M|f(t)|$ sobre $[0;A]$, donde

$$M = \max_{t\in[0;A]} te^{-\alpha t},$$

la función $t \mapsto te^{-\alpha t}|f(t)|$ es Lebesgue-integrable sobre $[0;A]$. Luego lo es sobre $R_+ = [0;A]\cup]A;+\infty[$. Por el teorema de derivabilidad bajo el signo integral, $\mathcal{L}_f$ es derivable en $]\alpha;+\infty[$ y

$$\mathcal{L}_f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-txf(t)}\, dt.$$

d. Ya que $\lim_{t\to+\infty} t^n e^{-\alpha t} = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, podemos usar el mismo argumento de la pregunta **c** para demostrar por inducción que $\mathcal{L}_f$ es n veces derivable sobre $]\alpha; +\infty[$ y que

$$\mathcal{L}_f^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-tx} f(t)\, dt.$$

e. Al aplicar el teorema de convergencia dominada como en la pregunta **b**, se obtiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}_f^{(n)}(x) = 0.$$