Solución Parcial 1

16 DE MARZO 2011 — FLORENT SCHAFFHAUSER

Ejercicio 1. Sea $\mathbb{Q} = \{q_0, \cdots, q_n, \cdots\}$ una enumeración de $\mathbb{Q}$ y sea $\varepsilon > 0$. Se tiene

$$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} I_i$$

con $I_i =]q_i - \frac{\varepsilon}{2^i}; q_i + \frac{\varepsilon}{2^i}[$ y

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |I_i| = 2\varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon.$$

Ya que ε es arbitrario, $\mathbb{Q}$ es un subconjunto de medida de Lebesgue nula de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. La σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ está generada (por ejemplo) por los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ de la forma

$$]a; b[, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Sea $A = f^{-1}(]a; b[)$. Al ser monótona f (por ejemplo, creciente), se tiene, si $x, y \in A$,

$$x \leq t \leq y \Rightarrow a < f(x) \leq f(t) \leq f(y) < b$$

luego $t \in A = f^{-1}(]a; b[)$ luego

$$]x; y[\subset A.$$

Esto significa que A es una parte convexa de $\mathbb{R}$, es decir un intervalo (que puede ser abierto, cerrado o semi-abierto). Por lo tanto, A es un boreliano de $\mathbb{R}$ y f es medible.

Ejercicio 3. Sea

$$A = \{x \in X \mid \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \text{ existe y es finito}\}.$$

Ya que $\mathbb{R}$ es completo, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge si y sólo si es de Cauchy y

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X \mid \forall n \geq 1, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p, q \geq n_0, |f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{n}\} \\ &= \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{p,q \geq n_0} \{x \in X \mid |f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{n}\} \end{aligned}$$

Al ser medibles las f_n, el conjunto

$$A_{n,p,q} = \{x \in X \mid |f_p(x) - f_q(x)| < \frac{1}{n}\}$$

es medible para todos p, q, n. Luego A es medible como intersección y unión numerables de conjuntos medibles.

Ejercicio 4. Recordamos que

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

a. Queremos mostrar :
- $\nu_f(\emptyset) = 0$.
- $\nu_f(\sqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(A_n)$.

La primera propiedad es consecuencia del hecho de que $f\mathbf{1}_\emptyset = 0$ sobre X. Para la segunda, si $A = \sqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, se tiene

$$\mathbf{1}_A = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n}.$$

La sucesión $(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{A_k})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego, por el teorema de convergencia monótona,

$$\begin{aligned}
\nu_f\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \nu_f(A) \\
&= \int_X f\mathbf{1}_A \, d\mu \\
&= \int_X \left(f\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{A_n}\right) d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f\mathbf{1}_{A_n} \, d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_f(A_n).
\end{aligned}$$

b. Si $g = \mathbf{1}_A$, tenemos

$$\int_X g \, d\nu_f = \int_X \mathbf{1}_A \, d\nu_f = \nu_f(A) = \int_X f\mathbf{1}_A \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

Luego, si $g = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}$, esto sigue siendo cierto por linealidad de la integral. Si g es medible positiva, se escribe

$$g = \lim_{n\to+\infty} g_n$$

con $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succesión creciente de funciones medibles simples. Entonces, por el teorema de convergencia monótona aplicado primero a la medida ν_f, luego a la medida μ, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_X g \, d\nu_f &= \int_X (\lim_{n\to+\infty} g_n) \, d\nu_f \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n \, d\nu_f \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_X fg_n \, d\mu \\
&= \int_X \lim_{n\to+\infty} (fg_n) \, d\mu \\
&= \int_X fg \, d\mu.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.

a. $\{f \geq n\} = f^{-1}([n; +\infty])$ es medible porque f es medible y $[n; +\infty] \subset [0; +\infty]$ es medible. Luego

$$\int_X f \, d\mu \geq \int_{\{f\geq n\}} f \, d\mu \geq n \int_{\{f\geq n\}} d\mu \geq n \, \mu\big(\{f \geq n\}\big).$$

b. $f : X \to [0; +\infty]$ integrable significa que

$$\int_X f \, d\mu < +\infty.$$

Entonces

$$0 \leq \mu\big(\{f \geq n\}\big) \leq \frac{1}{n} \int_X f \, d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ya que $A_n := \{f \geq n\}$ es una colección decreciente de conjuntos medibles que satisface $\mu(A_1) < +\infty$ y

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \{f = +\infty\},$$

tenemos

$$\mu\big(\{f=+\infty\}\big)=\lim_{n\to+\infty}\mu\big(\{f\geq n\}\big)=0.$$

Ejercicio 6.

a. $f=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}f_k$ es medible como límite simple (puntual) de funciones medibles.

b. La succesión $(\sum_{k=1}^{n}f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, luego, por el teorema de convergencia monótona,

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \int_X\sum_{n=1}^{+\infty}f_n\,d\mu\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_X f_n\,d\mu.\end{aligned}$$

c. Si $\sup_{x\in X}f_n(x)\leq\frac{1}{n^2}$, se tiene

$$\int_X f_n\,d\mu\leq\frac{1}{n^2}\,\mu(X)$$

luego, por el punto anterior,

$$\int_X f\,d\mu\leq\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\times\mu(X)<+\infty.$$