Solución del examen final

21 de mayo 2011 Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Se tiene
$$\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=\frac{r}{p}+\frac{r}{q}=1$$
luego p' y q' son exponentes conjugados. Por la desiguladad de Hölder aplicada a las funciones medibles positivas f^r y g^r, se tiene
$$\|f^r g^r\|_1 \leq \|f^r\|_{p'}\ \|g^r\|_{q'},$$
lo cual nos da
$$\int_X (fg)^r \leq \left(\int_X f^{rp'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_X g^{rq'}\right)^{\frac{1}{q'}}$$
luego
$$\left(\int_X (fg)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_X f^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ejercicio 2.

a. Se utiliza el teorema de convergencia dominada. La succesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una succesión de funciones medibles que converge puntualmente (en este caso, en todas partes) a $\operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} f_n$ (pues es decreciente y positiva esta succesión). Además, para cualquier $n\in\mathbb{N}$, se tiene $f_n \leq f_0$ con f_0 integrable. Luego, por el teorema de convergencia dominada, se tiene que $\operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es integrable, que $(\int_X f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu = \int_X (\operatorname*{ínf}_{n\in\mathbb{N}} f_n)\,d\mu.$$

b. Si $f_n = \mathbf{1}_{[n;+\infty[}$, entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una succesión decreciente de funciones medibles positivas y se tiene, para cualquier $n\in\mathbb{N}$,
$$\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda = +\infty.$$
Luego esta succesión no converge en $\mathbb{R}$ (y aunque converge en $[0;+\infty]$, el límite no es $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} f$, pues $\operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} f_n = 0$). Por lo tanto, la hipótesis $f_0\in\mathbf{L}^1(\mu)$ es necesaria para llegar a la conclusión anterior.

Ejercicio 3.

a. Consideremos la función medible
$$\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x-y)g(y) \end{array}.$$
Por el teorema de Tonelli aplicado a la función medible positiva $|\Phi|$, se tiene que
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|\,dxdy &= \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)\,dx\right) dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |f(u)|\,du\right) < +\infty\end{aligned}$$
donde la última igualdad viene de la invariancia por traslación de la medida de Lebesgue. Al ser finita esta integral, el teorema de Fubini permite afirmar que la función
$$f*g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$
es finita casi en todas partes, medible e integrable sobre $\mathbb{R}$. Además
$$\left|\int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\,dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(x-y)||g(y)|\,dxdy = \|f\|_1\ \|g\|_1.$$

b. Si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, la función $t \longmapsto f(t)e^{-i2\pi\xi t}$ cumple con $|f(t)e^{-i2\pi\xi t}| = |f(t)|$, por lo cual también es integrable sobre $\mathbb{R}$ esa función. Luego $\widehat{f}$ es bien definida.

c. Vimos que $f * g$ era integrable. Luego $\widehat{f * g}$ es bien definida y, por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (f*g)(t)e^{-i2\pi\xi t}\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)\,du\right) e^{-i2\pi\xi t}\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(t-u)g(u)e^{-i2\pi\xi(t-u)}e^{-i2\pi\xi u}\,dtdu \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} g(u)e^{-i2\pi\xi u}\,du\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-i2\pi\xi v}\,dv\right) \\
&= \widehat{f}(\xi)\ \widehat{g}(\xi)
\end{aligned}$$

donde se usó otra vez Fubini y la invariancia por traslación de la medida de Lebesgue.

d. Supongamos primero que f es una función de clase C^1 con soporte compacto en $\mathbb{R}$. Entonces, por una integración por partes,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi\xi t}\,dt = \left[f(t)\frac{e^{-i2\pi\xi t}}{-i2\pi\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{i2\pi\xi}\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i2\pi\xi t}\,dt,$$

donde la segunda integral tiene sentido pues f' es una función continua con soporte compacto. Luego

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left|0 + \frac{1}{i2\pi\xi}\int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-i2\pi\xi t}\,dt\right| \leq \frac{1}{i2\pi|\xi|}\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|\,dt \underset{|\xi|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ahora, si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ es arbitraria y ε es un real positivo, existe una función g de clase C^1 con soporte compacto tal que $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ (por densidad de esas funciones en $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$). Luego

$$\widehat{f}(\xi) \leq |\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \leq \|f-g\|_1 + |\widehat{g}(\xi)| < 2\varepsilon$$

si $|\xi|$ es lo suficiente grande, pues

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{g}(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}} (f(t)-g(t))e^{-i2\pi\xi t}\,dt\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)-g(t)|\,dt = \|f-g\|_1 < \varepsilon.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

e. Supongamos que existe $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ tal que, $\forall h \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$,

$$g * h = h * g = h.$$

Entonces, para $h = f = (t \longmapsto e^{-\pi t^2})$, se tiene

$$\widehat{g * f} = \widehat{f * g} = \widehat{f}$$

luego

$$\widehat{g}\ \widehat{f} = \widehat{f}\ \widehat{g} = \widehat{f}.$$

Ya que $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2} \neq 0$ sobre $\mathbb{R}$, lo anterior implica que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{g}(\xi) = 1,$$

lo cual contradice que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{g}(\xi) = 0.$$