Parcial 3, duración 2h.

11 de mayo 2011 — Florent Schaffhauser

No se autorizan libros ni notas personales. Se recomienda usar un borrador.

Ejercicio 1. (1 punto) Calcular $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx$.

Ejercicio 2. (2 puntos) Se define, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, la función $f_n : x \mapsto (\operatorname{sen} x)\, e^{-nx}$.

a. Mostrar que, para cualquier $n \geq 1$, la función f_n es Lebesgue-medible y

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx < +\infty.$$

b. Deducir de lo anterior que la función

$$f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es Lebesgue-integrable sobre $[0; +\infty[$ y que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Ejercicio 3. (7 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sean $p < q$ en $[1; +\infty]$.

a. Se supone primero que $q < +\infty$ y se considera $f \in \mathbf{L}^p(\mu) \cap \mathbf{L}^q(\mu)$. Mostrar que, para cualquier $r \in]p; q[$, se tiene $f \in \mathbf{L}^r(\mu)$. *Indicación :* Se podrá demostrar primero que

$$|f|^r \leq |f|^p \mathbf{1}_{\{|f| \leq 1\}} + |f|^q \mathbf{1}_{\{|f| > 1\}}.$$

b. De ahora en adelante, se supone que $q = +\infty$ y se considera $f \in \mathbf{L}^p(\mu) \cap \mathbf{L}^\infty(\mu)$. Mostrar que, para cualquier entero $r \in]p; +\infty[$, se tiene $f \in \mathbf{L}^r(\mu)$ y que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{p/r} \, \|f\|_\infty^{1-p/r}.$$

Indicación : Se podrá escribir

$$|f|^r = |f|^p |f|^{r-p} \leq |f|^p \|f\|_{+\infty}^{r-p},$$

donde la desigualdad vale μ-casi en todas partes.

c. Deducir de lo anterior que

$$\limsup_{r > p} \|f\|_r \leq \|f\|_\infty.$$

d. De ahora en adelante, se supone además que $\|f\|_\infty \neq 0$. Sea $\varepsilon \in]0; \|f\|_\infty[$ y sea

$$E_\varepsilon = \{x \in X \mid |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}.$$

Mostrar que E_ε es medible y que

$$\mu(E_\varepsilon) > 0.$$

e. Mostrar que, para cualquier $r > p$,

$$\left(\|f\|_\infty - \varepsilon\right)^r \mu(E_\varepsilon) \leq \|f\|_r^r < +\infty.$$

f. Deducir de lo anterior que

$$\|f\|_\infty \leq \liminf_{r > p} \|f\|_r.$$

g. Mostrar que, si $f \in \mathbf{L}^p(\mu) \cap \mathbf{L}^\infty(\mu)$, entonces la succesión $(\|f\|_r)_{r > p}$ converge y que

$$\lim_{r \to +\infty} \|f\|_r = \|f\|_\infty.$$