Parcial 2, duración 2h.

13 de abril 2011 — Florent Schaffhauser

No se autorizan libros ni notas personales. Se recomienda usar un borrador.

Ejercicio 1. (3 puntos) Consideremos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la integral

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (\cos x)^n \, dx.$$

a. Mostar que la función $x \mapsto e^{-x}$ es Lebesgue-integrable sobre $[0; +\infty[$.

b. Mostrar que, para cualquier $x \in [0; +\infty[$,

$$\left| \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (\cos x)^n \mathbf{1}_{[0;n]}(x) \right| \leq e^{-x}.$$

c. Determinar $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

Ejercicio 2. (2 puntos) Cada vez que se escribe una integral, se justificará que existe.

a. Calcular, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la integral

$$\int_0^1 x^n (\ln x) \, dx.$$

b. Mostrar que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejercicio 3. (5 puntos) Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue-integrable. Se define la *transformada de Laplace* de f por la siguiente fórmula

$$\mathcal{L}_f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) \, dt.$$

a. Mostrar que $\mathcal{L}_f$ es una función bien definida y continua sobre $[0; +\infty[$.

b. Mostrar que $\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}_f(x) = 0$.

c. Mostrar que $\mathcal{L}_f$ es derivable sobre $]0; +\infty[$ y que

$$\mathcal{L}'_f(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-tx} f(t) \, dt.$$

Indicación : Se podrá estudiar la derivabilidad de $\mathcal{L}_f$ sobre $]\alpha; +\infty[$ para todo $\alpha > 0$.

d. Mostrar que, para cualquier entero $n \geq 1$, $\mathcal{L}_f$ es n veces derivable sobre $]0; +\infty[$ y que

$$\mathcal{L}_f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (-1)^n t^n e^{-tx} f(t) \, dt.$$

e. Mostrar que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}_f^{(n)}(x) = 0.$$