# Parcial 1, duración 2h.

16 DE MARZO 2011 FLORENT SCHAFFHAUSER

***No se autorizan libros ni notas personales. Se recomienda usar un borrador.***

**Ejercicio 1.** (1 punto) *Demostrar*, a partir de la definición, que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto de medida de Lebesgue nula de $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 2.** (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación monótona. Mostrar que $f$ es boreliana.

**Ejercicio 3.** (1 punto) Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ una succesión de funciones medibles. Mostrar que el conjunto

$$\{x \in X \mid \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \text{ existe y es finito}\}$$

es medible. *Indicación* : Se podrá usar que una succesión de números reales converge hacia un límite finito si y sólo si esta succesión es de Cauchy.

**Ejercicio 4.** (2 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y $f : X \to [0; +\infty]$ una aplicación boreliana.

**a.** Mostrar que la aplicación

$$\nu_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & [0; +\infty] \\ A & \longmapsto & \int_A f \, d\mu \end{array}$$

es una medida sobre $(X, \mathcal{M})$.

**b.** Mostrar que si $g : X \to [0; +\infty]$ es medible, entonces

$$\int_X g \, d\nu_f = \int_X fg \, d\mu.$$

*Indicación* : se podrá empezar con el caso en que $g$ es simple, luego usar que una función medible positiva es límite de una succesión creciente de funciones medibles simples.

**Ejercicio 5.** (2 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \to [0; +\infty]$ una aplicación medible.

**a.** Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Mostrar que el conjunto $\{f \geq n\}$ es un subconjunto medible de $X$ y que

$$\mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int_X f \, d\mu.$$

**b.** Deducir de lo anterior que si $f$ es integrable entonces

$$\mu(\{f = +\infty\}) = 0.$$

**Ejercicio 6.** (3 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succesión de funciones medibles sobre $X$, con valores en $[0; +\infty]$.

**a.** Mostrar que la función

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

es una función medible sobre $X$, con valores en $[0; +\infty]$.

**b.** Mostrar que

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

**c.** Mostrar que si $X$ es de medida finita y si, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sup_{x \in X} f_n(x) \leq \frac{1}{n^2} ,$$

entonces $f$ es integrable sobre $X$.