Examen final, duración 2h.

21 de mayo 2011 — Florent Schaffhauser

No se autorizan libros ni notas personales. Se recomienda usar un borrador.

Ejercicio 1. (2 puntos) Sean $p, q, r \geq 1$ tales que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\cdot$$

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sean $f, g : X \to [0; +\infty]$ dos funciones medibles y positivas. Mostrar que

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indicación : Mostrar que $p' := \frac{p}{r}$ y $q' = \frac{q}{r}$ son exponentes conjugados y aplicar la desigualdad de Hölder a dos funciones bien escogidas.

Ejercicio 2. (2+1 puntos) Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sea

$$f_0 \geq f_1 \geq \cdots \geq f_n \geq \cdots \geq 0$$

una succesión decreciente de funciones medibles positivas. Se supone que $f_0 \in \mathbf{L}^1(\mu)$.

a. Mostrar que la succesión $\left(\int_X f_n \, d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$ y que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\inf f_n) \, d\mu.$$

b. Considerando el ejemplo $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{M}_L, \lambda)$ (el espacio de Lebesgue) y la succesión $f_n = \mathbf{1}_{[n;+\infty[}$, mostrar que la hipótesis $f_0 \in \mathbf{L}^1(\mu)$ es necesaria para llegar a la conclusión anterior.

Ejercicio 3. (5 puntos) Se considera el espacio de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_L, \lambda)$ y se recuerda la definición del producto de convolución en $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, dy,$$

y de la transformada de Fourier de un elemento de $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\xi t} \, dt.$$

a. Mostrar que, si $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $f * g$ es una función bien definida, Lebesgue-medible, Lebesgue-integrable sobre $\mathbb{R}$ y

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

b. Mostrar que, si $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f}$ es una función bien definida sobre $\mathbb{R}$.

c. Mostrar que, si $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

d. Mostrar que

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Indicación : Suponer primero que f es una función de clase C^1 con soporte compacto en $\mathbb{R}$ y utilizar una integración por partes. Utilizar después que esas funciones son densas en $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$.

e. Se acepta el siguiente resultado : si $f : t \mapsto e^{-\pi t^2}$, entonces $\widehat{f} : \xi \mapsto e^{-\pi \xi^2}$. Mostrar que no existe una función $g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ tal que, para cualquier $h \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$,

$$g * h = h * g = h.$$