Hoja de ejercicios 8 : Espacios $\mathbf{L}^p$ (II)

2011-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Se recuerda la definición del producto de convolución en $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y).$$

a. Mostrar que, si $f, g \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g = g * f$.
b. Mostrar que, si $f, g, h \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(f * g) * h = f * (g * h)$.

EJERCICIO 2. Sea $f \in \mathbf{L}^p(\mu)$ y sea $\alpha > 0$. Mostrar que

$$\mu\big(\{|f| > \alpha\}\big) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

EJERCICIO 3. Sea $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
a. Mostrar que la función

$$\widehat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi\xi t}\, d\lambda(t) \end{array}$$

está bien definida. La función $\widehat{f}$ se llama la *transformada de Fourier* de f.
b. Mostrar que

$$\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0.$$

Indicación : Suponer primero que f es una función de clase C^1 con soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ y utilizar una integración por partes. Utilizar después que esas funciones son densas en $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$.
c. Mostrar que

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}.$$

EJERCICIO 4. Sea

$$f : t \mapsto e^{-\pi t^2}.$$

Mostrar, utilizando una integral sobre un contorno en el plano complejo, que

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

EJERCICIO 5. Sea $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^n)$ y sea g una función acotada, contínuamente derivable y cuyas derivadas parciales son acotadas sobre $\mathbb{R}^n$. Mostrar que $f * g$ es acotada, contínuamente derivable y que sus derivadas parciales son acotadas sobre $\mathbb{R}^n$. *Indicación* : Mostrar que, para cualquier i, $f * g$ tiene una derivada parcial continua con respecto a x_i dada por

$$\frac{\partial (f * g)}{\partial x_i} = f * \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right).$$

EJERCICIO 6. Se considera el espacio vectorial $\mathbf{L}^2([0; 2\pi], \mathbb{C})$ de (clases de) funciones $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{C}$, Lebesgue-medibles y de módulo al cuadrado Lebesgue-integrable sobre $[0; 2\pi]$, con norma

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt.$$

Se recuerda que esto es un espacio completo.
a. Mostrar que

$$(f \,|\, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

es un producto escalar sobre el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbf{L}^2([0; 2\pi]; \mathbb{C})$ y que la norma asociada es la norma $\|\cdot\|_2$.
b. Se define la transformación

$$f \mapsto \left(\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt\right)_{k \in \mathbb{Z}}.$$

También se definen las funciones

$$e_k : t \longmapsto e^{ikt}$$

y la *serie de Fourier* de f por la expresión

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e_k.$$

i. Mostrar que la colección $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia ortonormal en $\mathbf{L}^2([0; 2\pi]; \mathbb{C})$.
ii. Mostrar que $S_n(f)$ es la proyección ortogonal de f sobre el subespacio vectorial de dimensión finita

$$F_n := \mathrm{Vect}\big((e_k)_{-n \leq k \leq n}\big).$$

EJERCICIO 7. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido de medida 1. Sea $f \in \mathbf{L}^1(X; \mathbb{R})$ y sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa derivable.
a. Sea

$$t_0 = \int_X f\, d\mu.$$

Mostrar que existen a y b en $\mathbb{R}$ tales que

$$\varphi(t_0) = at_0 + b \quad \text{y} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \geq at + b.$$

b. Mostrar que

$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f)\, d\mu.$$

Este resultado se conoce como la *desigualdad de Jensen. Indicación* : Aplicar lo anterior a $t = f(x)$ e integrar la desigualdad así obtenida.