Hoja de ejercicios 7 : Espacios $\mathbf{L}^p$ (I)

2011-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1.
a. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible de medida finita. Mostrar que si $q > p > 0$, entonces $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$. *Indicación* : Considerar $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$ y escribir

$$\int_X |f|^p = \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p + \int_{\{|f|<1\}} |f|^p.$$

b. Sea $(I, \mathcal{P}(I), m)$ un espacio medido discreto. Se denota $\ell^p(I)$ el espacio $L^p(I, m)$. Mostrar que si $q > p > 0$, entonces $\ell^p(I) \subset \ell^q(I)$. *Indicación* : Considerar $(x_i)_{i\in I} \in \ell^p(I)$, mostrar que $J := \{i \in I \mid |x_i| > 1\}$ es finito y escribir

$$\sum_{i\in I} |x_i|^q = \sum_{i\in J} |x_i|^q + \sum_{i\in I\setminus J} |x_i|^q.$$

c. Se considera la medida de Lebesgue en $]1; +\infty[$. Mostrar que $x \mapsto \frac{1}{x}$ pertenece a $\mathcal{L}^2$ pero no pertenece a $\mathcal{L}^1$ y mostrar que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}} \mathbf{1}_{]1;2]}(x)$ pertenece a $\mathcal{L}^1$ pero no pertenece a $\mathcal{L}^2$.

EJERCICIO 2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medible. Sea $p \in [1; +\infty[$ y sea $(f_n : X \to [0; +\infty])_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles.
a. Mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X (f_0 + \cdots + f_n)^p \, d\mu = \int_X \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^p d\mu.$$

b. Mostrar que

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_p.$$

EJERCICIO 3. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido. Mostrar que

$$(f \mid g) := \int_X f\overline{g} \, d\mu$$

es un producto hermítico en $\mathcal{L}^2(X, \mu; \mathbb{C})$. Deducir del teorema de Riesz-Fischer que $\mathbf{L}^2(X, \mu; \mathbb{C})$ es un espacio de Hilbert. *Indicación* : Utilizar la desigualdad de Hölder para demostrar que $|(f \mid g)| < +\infty$.

EJERCICIO 4. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido. Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y sea $g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Mostrar que $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y que

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

EJERCICIO 5. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \to [0; +\infty]$ una función (no necesariamente medible). Se denota $\sup_e(f)$ la cota superior esencial de f. Mostrar que $\sup_e(f)$ es el elemento de $[0; +\infty]$ caracterizado por la siguientes dos condiciones :
(i) el conjunto $\{f > \sup_e(f)\}$ es μ-omitible.
(ii) para cualquier $\alpha > 0$, el conjunto

$$\{f > \sup_e(f) - \alpha\}$$

no es μ-omitible.

EJERCICIO 6. Sea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \lambda)$ el espacio de Lebesgue.
a. Mostrar que si f es acotada sobre $\mathbb{R}^n$, entonces $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
b. Mostrar que si f también es continua, entonces

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f(x)\|.$$

EJERCICIO 7. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido de medida finita. Mostrar que

$$\mathbf{L}^\infty(\mu) \subset \bigcap_{p\geq 1} \mathbf{L}^p(\mu)$$

pero que esta inclusión es estricta en general. *Indicación* : Para demostrar que la inclusión es estricta en general, se podrá considerar el espacio de probabilidad $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu : n \mapsto \frac{1}{2^n})$, la función $f : n \longmapsto \ln n$ y mostrar que $f \in \cap_{p\geq 1} \mathbf{L}^p(\mu)$ pero $f \notin \mathbf{L}^\infty(\mu)$.

EJERCICIO 8. Sea $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, \lambda)$ el espacio de Lebesgue y sea $p \in [1; +\infty[$.
a. Mostrar que

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{[n;n+\frac{1}{n^{3/p}}]}$$

pertenece a $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ pero no pertenece a $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$.
b. Mostrar que una función constante estrictamente positiva en $\mathbb{R}$ pertenece a $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ pero que no pertenece a ningún $\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ para $p \in [1; +\infty[$.