Hoja de ejercicios 6 : Cálculo integral (II)

2011-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\, z > 0$ y sea

$$\Gamma : z \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

a. Mostrar que Γ está bien definida sobre $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$.
b. Mostrar que Γ es holomorfa sobre $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$.
c. Mostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = +\infty$.
d. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succesión de números reales positivos que converge a 0. Mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} t^{x_n - 1} e^{-t} = \frac{e^{-t}}{t}.$$

e. Utilizando el lema de Fatou, mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \Gamma(x_n) = +\infty.$$

f. Deducir de lo anterior que

$$\lim_{x\to 0, x>0} \Gamma(x) = +\infty.$$

EJERCICIO 2. Estudiar

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\cos\frac{1}{x}\right)^n dx.$$

EJERCICIO 3. Sean $a, b > 0$ tales que $a < b$.
a. Mostrar que la función

$$f_n : (x,y) \longmapsto \mathrm{sen}(xy)\mathbf{1}_{[a;b]}(x)\mathbf{1}_{[0;n]}(y)$$

es integrable sobre $\mathbb{R}^2$.
b. Utilizando el teorema de Fubini, mostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ay) - \cos(by)}{y}\, dy = \ln b - \ln a.$$

EJERCICIO 4. Mostrar las siguientes identidades
a. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.
b. $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$.
c. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{\pi}$.
d. $\forall a > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a\|x\|^2}\, dx = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n$.

EJERCICIO 5. Mostrar que la función

$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{1 + 3^{2n}(x - 3^n)^2}$$

es integrable sobre $\mathbb{R}$ y que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 3\pi.$$

Indicación : Se podrá considerar la succesión de funciones medibles positivas

$$f_n : x \mapsto \frac{2^n}{1 + 3^{2n}(x - 3^n)^2}.$$

EJERCICIO 6. Se considera la función

$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{sen}\, x}{e^x - 1}.$$

a. Mostrar que f es integrable sobre $[0; +\infty[$.
b. Mostrar que, para cualquier $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

c. Sea

$$f_n : x \longmapsto (\mathrm{sen}\, x)e^{-nx}.$$

Mostrar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx < +\infty.$$

d. Deducir de lo anterior que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}\, x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}.$$

EJERCICIO 7. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido σ-finito y sea $f : X \to [0; +\infty[$ una función medible. Llamemos hipográfica de f el conjunto

$$\mathrm{Hgr}(f) := \{(x,y) \in X \times [0; +\infty[\,|\, y \leq f(x)\}.$$

Se denota ν la restricción a $[0; +\infty[$ de la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ y se considera la medida producto $\mu \otimes \nu$ en $X \times [0; +\infty[$.
a. Mostrar que $\mathrm{Hgr}(f)$ es un subconjunto medible de $X \times [0; +\infty[$ y que

$$(\mu \otimes \nu)\big(\mathrm{Hgr}(f)\big) = \int_X f\, d\mu.$$

b. Interpretar el resultado cuando $X = I$, un intervalo de $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue.

EJERCICIO 8. Sea $\varphi : U \to V$ un difeomeorfismo entre dos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y sea N un subconjunto omitible de U.
a. Mostrar que $\varphi(N)$ es un subconjunto medible de medida nula de V.
b. Utilizando un homeomorfismo entre dos conjuntos de Cantor bien escogidos, mostrar que es necesaria la hipótesis que φ sea un difeomorfismo.