Hoja de ejercicios 5 : Cálculo integral (I)

2011-I — FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Se denota λ la medida de Lebesgue sobre $[0;1]$.
a. Sea $k \in \mathbb{N}$. Mostrar que la función

$$f_k : x \longmapsto x^{2k}(1-x)$$

es Lebesgue-integrable sobre $[0;1]$ y calcular

$$\int_{[0;1]} f_k \, d\lambda.$$

Indicación : Utilizar un teorema de comparación con la integral de Riemann.
b. Sea

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

Mostrar que, para cualquier $x \in [0;1]$,

$$g_n(x) = \frac{1-x^{2n+2}}{1+x}$$

y que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0;1]} g_n \, d\lambda = \ln 2.$$

Indicación : Utilizar el teorema de convergencia monótona.
c. Sea

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Deducir de lo anterior que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2.$$

Indicación : Estudiar por separado la convergencia de $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ y la de $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$.
d. Sea

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k.$$

Mostrar que, para cualquier $x \in [0;1]$,

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

e. Utilizar el teorema de convergencia dominada para demostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[0;1]} h_n(x) \, d\lambda = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Indicación : Establecer, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier $x \in [0;1]$, la desigualdad

$$h_n(x) \leq \frac{1}{1+x}.$$

f. Mostrar que

$$\int_{[0;1]} (-1)^k f_k \, d\lambda = \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^k}{2k+2}$$

y deducir de esto que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_{[0;1]} h \, d\lambda + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

g. Deducir de lo anterior que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

EJERCICIO 2. Estudiar $\lim_{n\to+\infty} I_n$ en los siguientes casos.
a. $I_n = \int_0^{\pi} \ln\left(e + \frac{x}{n}\right) \operatorname{sen} x \, dx$.
b. $I_n = \int_0^{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \, dx$.
c. $I_n = \int_0^{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n (\cos x)^n \, dx$.
d. $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \, dx$.

EJERCICIO 3. Mostrar que, para cualquier $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{\alpha-1} \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \, dx.$$

EJERCICIO 4. Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función Lebesgue-integrable. Se define la *transformada de Laplace* de f por la siguiente fórmula

$$\mathcal{L}_f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t) \, dt.$$

a. Mostrar que $\mathcal{L}_f$ está bien definida y es continua sobre $[0;+\infty[$.
b. Mostrar que $\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}_f(x) = 0$.
c. Mostrar que $\mathcal{L}_f$ es derivable sobre $]0;+\infty[$ y que

$$\mathcal{L}_f'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-tx} f(t) \, dt.$$

Indicación : Se podrá estudiar la derivabilidad de $\mathcal{L}_f$ sobre $]\alpha;+\infty[$ para todo $\alpha > 0$.
d. Mostrar que $\mathcal{L}_f'$ es continua sobre $]0;+\infty[$.
e. Mostrar que $\mathcal{L}_f$ es de clase C^∞ sobre $]0;+\infty[$ y calcular $\mathcal{L}_f^{(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
f. Estudiar

$$\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}_f^{(n)}(x).$$