Hoja de ejercicios 4 : La integral sobre un espacio medido

2011-I FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido.
a. Mostrar que una función medible *simple* $\varphi : X \to \mathbb{C}$ es integrable si y sólo si $\{\varphi \neq 0\}$ es un subconjunto de medida finita de X.
b. Mostrar que si una función medible $f : X \to [0; +\infty]$ es integrable, entonces $\{f > 0\}$ es un subconjunto σ-finito de X.
c. Mostrar que si una función medible $f : X \to \mathbb{C}$ es integrable, entonces $\{f \neq 0\}$ es un subconjunto σ-finito de X. *Indicación* : $\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\}$.

EJERCICIO 2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sea $f : X \to [0; +\infty[$ una función medible.
a. Se define, para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n2^{n-1}} \frac{k}{2^n} \mu\big(\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}\big).$$

La succesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la succesión de **sumas de Lebesgue** de f. Mostrar que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_X f\, d\mu.$$

Indicación : Mostrar que se puede aplicar el teorema de convergencia monótona a la succesión $\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \mathbf{1}_{E_n^k}$, donde $E_n^k = \{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}$.
b. Mostrar que si se autoriza el valor $+\infty$ para f y se define

$$T_n(f) = S_n(f) + n\mu\big(\{f \geq n\}\big),$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_X f\, d\mu.$$

EJERCICIO 3. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido. Mostrar que si $A, B \subset X$ son dos subconjuntos medibles de X tal que $A \cap B$ sea de medida nula y si $f : A \cup B \to \mathbb{C}$ es una función integrable sobre $A \cup B$, entonces

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

EJERCICIO 4. Se propone dar otra demostración del lema de Borel-Cantelli (Hoja 3, Ejercicio 8). Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succesión numerable de subconjuntos medibles de un espacio medido $(X, \mathcal{M}, \mu)$ tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(E_n) < +\infty$. Sea A el subconjunto de todos los $x \in X$ que pertencen a una cantidad infinita de E_n.
a. Mostrar que

$$A = \{x \in X \mid \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{E_n}(x) = +\infty\}.$$

b. Utilizar la hipótesis sobre los E_n y el teorema de convergencia monótona para demostrar que $\mu(A) = 0$. *Indicación* : Se podrá también usar que si $f : X \to [0; +\infty]$ es integrable, entonces $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ (demostrarlo!).

EJERCICIO 5. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido.
a. Mostrar que la aplicación

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(X;\mathbb{C}) & \longrightarrow & [0;+\infty[\\ f & \longmapsto & \int_X |f| \end{array}$$

es una semi-norma sobre $\mathcal{L}^1(X;\mathbb{C})$ y que su núcleo es

$$\{f \in \mathcal{L}^1(X;\mathbb{C}) \mid f = 0 \text{ ctp}\}.$$

b. Mostrar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una succesión de funciones integrables que converge a f por la semi-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\big(|f - f_n| > \varepsilon\big) = 0.$$

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en medida** a f.

EJERCICIO 6. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido *completo* y sea $Y = [0; +\infty]$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Sean f y g dos funciones de X a Y que coinciden μ-casi en todas partes.
a. Mostrar que f es medible si y sólo si f es medible.
b. Mostrar que f es integrable si y sólo si g es integrable y que, en este caso,

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

EJERCICIO 7. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido. Mostrar que si uno quiere obtener una aplicación lineal $f \in \mathcal{L}^1(X;\mathbb{C}) \mapsto \int_X f$, es necesario tener la convención aritmética $0 \times (+\infty) = 0$. *Indicación* : Considerar la función simple y medible $f : x \mapsto 0$ sobre $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue y volver a la definición de la integral.