# Hoja de ejercicios 3 : Espacios medidos

2011-I — Florent Schaffhauser

Ejercicio 1. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido. Mostrar que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una succesión creciente de subconjuntos medibles y si

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n,$$

entonces

$$\mu(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n).$$

Ejercicio 2. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido. Mostrar que si $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una succesión decreciente de subconjuntos medibles tal que existe un $n_0$ para cual $\mu(B_{n_0}) < +\infty$, y si

$$B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n,$$

entonces

$$\mu(B) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

Ejercicio 3. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $Y \subset X$ un subconjunto.
a. Mostrar que

$$\mathcal{M}|_Y := \{Y \cap A : A \in \mathcal{M}\}$$

es una $\sigma$-álgebra sobre $Y$, llamada $\sigma$-álgebra inducida.
b. Mostrar que si $Y$ es medible en $X$, entonces $\mathcal{M}|_Y \subset \mathcal{M}$.
c. Mostrar que si $\mu$ es una medida sobre $(X, \mathcal{M})$ y si $Y$ es medible en $X$, entonces la restricción, denotada $\mu_Y$, de $\mu$ a $\mathcal{M}|_Y$ es una medida sobre $(Y, \mathcal{M}|_Y)$. El espacio medido $(Y, \mathcal{M}|_Y, \mu_Y)$ se llama el espacio medido inducido por $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Ejercicio 4. Sea $\mu_c$ la aplicación de conteo sobre el espacio medible $(X, \mathcal{P}(X))$,

$$\mu_c(A) = \begin{cases} \text{card}\, A & \text{si } A \text{ es finito,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

a. Mostrar que $\mu_c$ es una medida sobre $(X, \mathcal{P}(X))$.
b. Mostrar que el espacio medido $(X, \mathcal{P}(X), \mu_c)$ es $\sigma$-finito si y sólo si $X$ es numerable.

Ejercicio 5. Sea $X$ un conjunto y sea $a$ un punto de $x$. Mostrar que la aplicación

$$\delta_a : A \in \mathcal{P}(X) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

es una medida finita sobre $(X, \mathcal{P}(X))$.

Ejercicio 6. Mostar que el espacio de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_L, \lambda)$ es $\sigma$-finito.

Ejercicio 7. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido completo. Mostrar que una función $f : X \to \mathbb{C}$ que es límite simple $\mu$-casi en todas partes de una succesión $(f_n : X \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones medibles es medible.

Ejercicio 8 (Lema de Borel-Cantelli). Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio medido y sea $(E_k)_{k\geq 1}$ una colección de subconjuntos medibles de $X$ tal que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(E_k) < +\infty$$

y sea $E$ el conjunto de todos los $x \in X$ que pertenecen *a una infinidad* de $E_k$.
a. Mostrar que

$$E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} E_k.$$

b. Mostrar que $E$ es medible y que $\mu(E) = 0$. *Indicación* : Se podrá utilizar el ejercicio 2.
c. *Aplicación* : Sea $\varepsilon > 0$ y sea $(E_q)_{q\geq 1}$ la colección definida de la siguiente manera :

$$E_q = \left\{ x \in [0;1] \mid \exists p \in \{0, \cdots, q-1\}, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^{2+\varepsilon}} \right\}.$$

Mostrar que

$$E = \cap_{n=1}^{+\infty} \cup_{q=n}^{+\infty} E_q$$

es el conjunto de los $x \in [0;1]$ para cuales existe una infinidad de racionales $\frac{p}{q}$ que satisfacen

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

(se dice que $x$ está *bien aproximado* por los racionales con orden $2+\varepsilon$). Mostrar que $E$ es un subconjunto de medida de Lebesgue nula de $[0;1]$ (es decir, que desde el punto de vista de la medida, la mayoría de los reales no están bien aproximados por los racionales).