Hoja de ejercicios 2 : Espacios medibles

2011-I FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea A un subconjunto de X. Mostrar que A es un subconjunto medible de X si y sólo si su función característica

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \big(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})\big) \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{si} & x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

es una aplicación medible ($\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ por la topología usual).

EJERCICIO 2. Sean X y Y dos espacios topológicos, con sus respectivas σ-álgebras de Borel $\mathfrak{B}(X)$ y $\mathfrak{B}(Y)$. Mostrar que una aplicación continua

$$f : X \to Y$$

es medible.

EJERCICIO 3. Sean $(X_1, \mathcal{M}_1)$ y $(X_2, \mathcal{M}_2)$ dos espacios medibles. La σ-álgebra producto de $X_1 \times X_2$, denotada $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, se puede definir de la siguiente manera : Es la σ-álgebra generada por $p_1^{-1}(\mathcal{M}_1)$ y $p_2^{-1}(\mathcal{M}_2)$, donde p_i es la proyección canónica de $X_1 \times X_2$ sobre X_i.
a. Mostrar que $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ así definida está generada por los rectángulos elementales

$$\{\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \,:\, \mathcal{R}_1 \in \mathcal{M}_1, \mathcal{R}_2 \in \mathcal{M}_2\}\,.$$

b. Mostrar que

$$f : (Y, \mathcal{M}) \longrightarrow (X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)$$

es medible si y sólo si $p_1 \circ f : Y \to X_1$ y $p_2 \circ f : Y \to X_2$ son medibles.

EJERCICIO 4. Sea $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ por la topología usual. Mostrar que

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^q).$$

Indicación : Utilizar que la topología usual tiene base numerable de abiertos para demostrar la inclusión

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{p+q}) \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^q).$$

EJERCICIO 5. Mostrar que la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ está generada por cualquiera de las siguientes colecciones de intervalos :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{]q; +\infty[\,:\, q \in \mathbb{Q}\}\,, \\ \mathcal{A}_2 &= \{[q; +\infty[\,:\, q \in \mathbb{Q}\}, \\ \mathcal{A}_3 &= \{]-\infty; q[\,:\, q \in \mathbb{Q}\}, \\ \mathcal{A}_4 &= \{]-\infty; q]\,:\, q \in \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

EJERCICIO 6. Se recuerda que los abiertos de $[0; +\infty]$ son o abiertos de $[0; +\infty[$ o conjuntos de la forma $]x; +\infty]$ para $x \in [0; +\infty[$. Mostar que un elemento de la σ-álgebra de Borel de $[0; +\infty]$ es o un boreliano de $[0; +\infty[$ o la unión de $\{\infty\}$ con un boreliano de $[0; +\infty[$. *Indicación* : Se podrá demostrar que la colleción de los conjuntos que acabamos de describir es una σ-álgebra que contiene los abiertos de $[0; +\infty]$.

EJERCICIO 7. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $f : X \to \mathbb{C}$ una aplicación con valores en $\mathbb{C}$. Mostrar que f es medible si y sólo si la parte real de f es medible y la parte imaginaria de f es medible. *Indicación* : Se podrá utilizar que $\mathfrak{B}(\mathbb{C}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

EJERCICIO 8. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f, g : X \to [0; +\infty]$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ dos aplicaciones medibles (*con respecto a las σ-álgebras de Borel en el espacio de llegada*).
a. Mostrar que $f + g$ y fg son medibles.
b. Mostrar que $|f|$ es medible.
c. Mostrar que si f no se anula, entonces $\frac{1}{f}$ es medible.

EJERCICIO 9. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $(f_n : X \to [0; +\infty])_{n \in \mathbb{N}}$ una succesión de aplicaciones medibles.
a. Mostrar que $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ y $\text{ínf}_{n \in \mathbb{N}}$ son aplicaciones medibles de X a $[0; +\infty]$.
b. Mostrar que $\text{lím sup}\, f_n$ y $\text{lím inf}\, f_n$ son medibles.
c. Mostrar que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplemente hacia f, entonces f es medible.

EJERCICIO 10. Mostrar que si $(f_n : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})_{n \in \mathbb{N}}$ es una succesión de aplicaciones medibles que converge simplemente hacia $f : X \to \mathbb{K}$, entonces f es medible.