Hoja de ejercicios 1 : La medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$

2011-I FLORENT SCHAFFHAUSER

EJERCICIO 1. Mostrar que un subconjunto numerable A de $\mathbb{R}$ es Lebesgue-medible y que es de medida de Lebesgue nula.

EJERCICIO 2. Mostrar que una intersección numerable de subconjuntos Lebesgue-medibles de $\mathbb{R}$ es Lebesgue-medible.

EJERCICIO 3. a. Mostrar que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible si y sólo si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un cerrado F de $\mathbb{R}$ tal que

$$\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon,$$

donde λ^* es la medida exterior de $\mathbb{R}$ asociada a la función de longitud de un intervalo (esta medida exterior fue introducida en clase).
b. Mostrar que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible si y sólo si existe una unión numerable de cerrados, $F = \cup_{n=0}^{+\infty} F_n$, y un subconjunto N de medida nula de $\mathbb{R}$, tal que

$$A = F \cup N.$$

EJERCICIO 4. Mostrar que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible si y sólo si existe una intersección numerable de abiertos, $O = \cap_{n=0}^{+\infty} O_n$, y un subconjunto N de medida nula de $\mathbb{R}$, tal que

$$A = O \setminus N.$$

EJERCICIO 5. Sea λ la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$.
a. Sea $A \subset \mathbb{R}$ Lebesgue-medible y sea $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que el subconjunto

$$x + A := \{x + a \,:\, a \in A\}$$

es Lebesgue-medible y que

$$\lambda(A) = \lambda(x + A).$$

Esta propiedad de la medida de Lebesgue se llama *invariancia por traslación*.
b. Mostrar que

$$-A := \{-a \,:\, a \in A\}$$

es Lebesgue-medible y que

$$\lambda(-A) = \lambda(A).$$

c. Sea $\alpha > 0$. Mostrar que

$$\alpha A := \{\alpha a \,:\, a \in A\}$$

es Lebesgue-medible y calcular $\lambda(\alpha A)$.

EJERCICIO 6. (Difícil) *Referencia*: Stein-Shakarchi, *Real Anlaysis*, pp. 16 a 27.
a. Mostrar que un abierto de $\mathbb{R}^n$ es unión numerable de cubos

$$R_j = [a_j; b_j]^n$$

cuyos interiores son disjuntos.
b. Mostrar que esto permite definir una medida exterior sobre $\mathbb{R}^n$ y que se puede seguir paso a paso la construcción de la σ-álgebra de Lebesgue y de la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$ para extender esta construcción a $\mathbb{R}^n$.
c. Verificar que todas las propiedades vistas en clase y en los ejercicios 1 a 4 para la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ siguen siendo ciertas para la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$, con una sola excepción :

$$\lambda(\alpha A) = \alpha^n \lambda(A).$$

EJERCICIO 7. Sea λ la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$ y sea C el conjunto de Cantor obtenido de la siguiente manera:

$$C_0 = [0; 1],$$
$$C_1 = [0; \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}; 1],$$
$$C_2 = [0; \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}; \frac{1}{3}] \cup [\frac{6}{9}; \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}; 1],$$
$$\vdots$$
$$\text{y} \quad C = \cap_{k=0}^{+\infty} C_k.$$

a. Mostrar que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(C_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Indicación : Mostrar que para cualquier $k \geq 1$,

$$\lambda(C_k) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \lambda(C_{k-1}).$$

b. Deducir de esto que

$$\lambda(C) = 0.$$

c. Proponer una construcción parecida pero que produzca un conjunto de Cantor de medida de Lebesgue positiva. *Indicación* : Construir por ejemplo C_k a partir de C_{k-1} de tal manera que

$$\lambda(C_k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \lambda(C_{k-1}).$$