Universidad de los Andes   Departamento de Matemáticas

MATE 1207 - Cálculo vectorial
Parcial 3 - 25/10/2010
Sección 21

Ejercicio 1 (3 puntos)

Sea P la región de $\mathbb{R}^3$ delimitada por el parabolóide de ecuación $z = x^2 + y^2$ y el plano de ecuación $z = 4$. Mostrar que

$$\iiint_P \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz = \frac{128\pi}{15}.$$

Sugerencia: se podrá dibujar la región P y aplicar el teorema de Fubini.

Ejercicio 2 (3 puntos)

Sea $R > 0$. Mostrar que el volumen de la bola

$$B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

de centro $(0, 0, 0)$ y de radio R es

$$\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Sugerencia: se podrá utilizar coordenadas esféricas en una integral triple bien escogida.

Ejercicio 3 (4 puntos)

Se propone estudiar la función

$$f : (x, y) \longmapsto 4x - 2x^2 - 2y^2$$

sobre la región

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

1. Justificar que f tiene un máximo global y un mínimo global sobre D (1 punto).
2. Se escribe $D = A \cup B$ donde
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 25\}$$
y
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}.$$
   a) Mostrar que f tiene un máximo local sobre A (1 punto).
   b) Hallar el máximo global y el mínimo global de f sobre B (1 punto).
   c) Concluir (1 punto).