Universidad de los Andes Departamento de Matemáticas

MATE 1207 - Cálculo vectorial

Solución del tercer parcial - 25/10/2010

Sección 21

Ejercicio 1

La región de integración es

$$P = \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 4, 0 \leq \ x^2 + y^2 \leq z\}.$$

El teorema de Fubini nos da

$$\iiint_P \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int_0^4 \left(\iint_{D_z} \sqrt{x^2+y^2}dxdy \right) dz,$$

donde $D_z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq z\}$. Pasando a coordenadas polares, uno obtiene

$$\begin{aligned} \iint_{D_z} \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{z}} r(rdr) \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{z}} \\ &= \frac{2\pi z\sqrt{z}}{3}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \iiint_P \sqrt{x^2+y^2}dxdydz &= \int_0^4 \frac{2\pi z\sqrt{z}}{3} dz \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[\frac{z^{5/2}}{5/2} \right]_0^4 \\ &= \frac{128\pi}{15}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

El volumen de la bola

$$B_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

de centro $(0, 0, 0)$ y de radio R es

$$I = \iiint_{B_R} dxdydz.$$

En coordenadas esféricas,

$$B_R = \{(r, \varphi, \theta) \in [0; +\infty[\times[0; \pi] \times [0; 2\pi] \mid r \leq R\}$$

luego

$$I = \iiint_{[0;R]\times[0;\pi]\times[0;2\pi]} r^2 \operatorname{sen} \varphi dr d\varphi d\theta$$

y, por Fubini,

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^R r^2 dr\right)\left(\int_0^R \operatorname{sen} \varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \\ &= \frac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned}$$

Ejercicio 3

1. La función f es continua sobre el subespacio cerrado y acotado D de $\mathbb{R}^2$ (D es el disco de centro $(0,0)$ y de radio 5), por lo que f tiene un máximo global y un mínimo global sobre D.

2. *a*) A es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y f es de clase C^2 sobre A. Los puntos críticos de f sobre A son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 4 - 4x &= 0 \\ -4y &= 0 \end{cases}$$

luego el único punto crítico de f sobre A es $(1,0)$. En $(1,0)$, la segunda derivada de f es

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

luego, en las notaciones de Monge, $rt - s^2 = (-4)(-4) - 0 = 16 > 0$ y $r = -4 < 0$, por lo que f tiene un máximo local en $(1,0)$.

b) Se puede notar que la función f es continua sobre el subespacio cerrado y acotado B de $\mathbb{R}^2$ (B es el círculo de centro $(0,0)$ y de radio 5), por lo que f tiene un máximo global y un mínimo global sobre B. Para hallar el máximo y el mínimo de f sobre $B = g^{-1}(\{0\})$, donde $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 25$, se usa el teorema de Lagrange (se puede porque $g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$ nunca es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ sobre B). Se sabe, por ese teorema, que el máximo y el mínimo de f sobre B tienen que cumplir con la siguiente condición:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} 4 - 4x &= 2\lambda x \\ -4y &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 25 \end{cases}.$$

En el caso presente, este sistema es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4-4x & = & 2\lambda x \\ -4y & = & 2\lambda y \\ x^2+y^2 & = & 25 \end{array} \right. .$$

Si $y \neq 0$, la segunda ecuación nos da $\lambda = -2$, luego $-4 = 0$ en la primera ecuación, lo que es absurdo. Por lo tanto, $y = 0$ y, usando la tercera ecuación, se obtiene que $x = 5$ o -5. Ya que $f(5,0) = 20 - 50 - 0 = -30$ y $f(-5,0) = -20 - 50 - 0 = -70$, f tiene su máximo global sobre B en el punto $(5,0)$ y su mínimo global sobre B en el punto $(-5,0)$.

c) Comparando los resultados obtenidos en a) y en b), vemos que

$$f(1,0) = 4,\ f(5,0) = -30 \text{ y } f(-5,0) = -70.$$

Luego f tiene su máximo **global** sobre D en el punto $(1,0)$ y su mínimo global sobre D en el punto $(-5,0)$.