UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE 1207 - Cálculo vectorial

Parcial 2 - 20/09/2010

Sección 21

Ejercicio (9 puntos)

Se considera la función

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^4+y^4-4xy+1 \end{array}$$

1. Hallar los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2$. (3 puntos)
2. Justificando el uso del teorema invocado, decir si estos puntos críticos son máximos locales, mínimos locales o puntos silla de f sobre $\mathbb{R}^2$. (3 puntos)
3. Estudiar la función $g : t \mapsto f(t,t)$ y dibujar su grafo. (2 puntos)
4. ¿Tiene f un máximo global sobre $\mathbb{R}^2$? Justificar la respuesta (indicación: se podrá utilizar el grafo de g). (1 punto)

Problema (11 puntos)

Juan tiene $12m^2$ de madera y quiere construir una caja **con tapa**. Nos proponemos encontrar las dimensiones de la caja que maximizan el volumen de ella.

1. Justificar **de manera detallada** que el problema de Juan es equivalente al siguiente problema $(\mathcal{P})$:

$$\text{maximizar } f(x,y,z) = xyz$$

$$\text{sobre } A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} 2xy+2yz+2zx = 12 \\ x>0, y>0, z>0 \end{array} \right. \right\}.$$

   Sugerencia: proponer una interpretación de lo que representan las variables x, y, z e ilustrar esta interpretación con un dibujo. (2 puntos)

2. Justificar que el problema $(\mathcal{P})$ es equivalente al siguiente problema $(\mathcal{P}')$:

$$\text{maximizar } g(x,y) = \frac{xy(6-xy)}{(x+y)}$$

$$\text{sobre } \mathcal{U} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, y>0 \right\}.$$

   (2 puntos)

3. Hallar los puntos críticos de g en $\mathcal{U}$. (3 puntos)
4. Justificando el uso del teorema invocado, decir si estos puntos críticos son máximos locales, mínimos locales o puntos silla de g sobre $\mathcal{U}$. (3 puntos)

5. Aceptando que el único máximo local de f es un máximo global, dar el volumen máximo de una caja con tapa construida a partir de $12m^2$ de madera. (1 punto)

6. *Bono*: ¿ qué forma tiene la caja cuando su volumen es máximo? (1 punto)