MATE 1207 - Cálculo vectorial
Solución del segundo parcial - 20/09/2010
Sección 21

Ejercicio (9 puntos)

1. La función f es derivable sobre $\mathbb{R}^2$. Los puntos críticos de f son, por definición, las soluciones (x, y) del siguiente sistema :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases}$$

En este caso, el sistema es

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y &= 0 \\ 4y^3 - 4x &= 0 \end{cases}$$

y tiene como soluciones

$$(0,0),\ (1,1) \text{ y } (-1,-1).$$

2. La función f es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^2$, luego podemos utilizar el criterio de la segunda derivada para decir si los puntos críticos de f son máximos o mínimos locales, o puntos silla. Se tiene que

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando las notaciones de Monge, se tiene

- en $(0,0)$: $rt - s^2 = 0 - 16 < 0$ luego $(0,0)$ es un punto silla.
- en $(1,1)$: $rt - s^2 = 144 - 16 > 0$ y $r = 12 > 0$ luego $(1,1)$ es un mínimo local.
- en $(-1,-1)$: $rt - s^2 = 144 - 16 > 0$ y $r = 12 > 0$ luego $(-1,-1)$ es un mínimo local.

3. Se tiene que $g(t) = f(t,t) = 2t^4 - 4t^2 + 1$, luego

$$g'(t) = 8t^3 - 8 = 8t(t-1)(t+1)$$

y el signo de g' es así :

t		-1		0		1	
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. Se tiene que $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$ luego f no tiene un máximo global sobre $\mathbb{R}^2$. También se puede notar que f no tiene máximo local sobre $\mathbb{R}^2$, por lo que no puede tener máximo global.

Problema (11 puntos)

1. El volumen de una caja con tapa de lados $x, y, z > 0$ (longitudes expresadas en metros) es $f(x,y,z) = xyz$ y el área de esa caja es $2xy+2yz+2zx$. Luego, maximizar el volumen de una caja de lados x, y, z construida con $12m^2$ de madera es equivalente a maximizar la función f sobre el conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{l} 2xy + 2yz + 2zx = 12 \\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \end{array} \right. \right\}.$$

2. Despejando z en la ecuación $2xy + 2yz + 2zx = 12$, viene

$$z = \frac{(6-xy)}{x+y}\cdot \tag{1}$$

Luego, maximizar f sobre A es equivalente a maximizar la función

$$g : (x,y) \longmapsto f\left(x, y, \frac{(6-xy)}{x+y}\right) = \frac{xy(6-xy)}{x+y} = \frac{6xy - x^2y^2}{x+y}$$

sobre el abierto

$$\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$$

de $\mathbb{R}^2$.

3. La función g es derivable sobre $\mathcal{U}$. Los puntos críticos de g son, por definición, las soluciones (x,y) del siguiente sistema :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right.$$

En este caso, el sistema es

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{y^2}{(x+y)^2}(6 - x^2 - 2xy) & = 0 \\ \frac{x^2}{(x+y)^2}(6 - y^2 - 2xy) & = 0 \end{array} \right.$$

y tiene como única solución en $\mathcal{U}$ el punto

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

4. La función g es de clase C^2 sobre $\mathcal{U}$, luego podemos utilizar el criterio de la segunda derivada para decir si el puntos crítico de g es un máximo o mínimo local, o un punto silla. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{(-2xy^2 - 2y^3)(x+y)^2 - (6y^2 - x^2y^2 - 2xy^3)2(x+y)}{(x+y)^4} \\ &= \frac{-2y^2(6+y^2)}{(x+y)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{(-2x^2y-2x^3)(x+y)^2-(6x^2-x^2y^2-2x^3y)2(x+y)}{(x+y)^4}\\ &= \frac{-2x^2(6+x^2)}{(x+y)^3},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y)\\ =\ &\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y)\\ =\ &\frac{(12y-2x^2y-6xy^2)(x+y)^2-(6y^2-x^2y^2-2xy^3)2(x+y)}{(x+y)^4}\\ =\ &\frac{12xy-2x^3y-2xy^3-6x^2y^2}{(x+y)^3},\end{aligned}$$

luego

$$f''(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en las notaciones de Monge, se tiene que, en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$,

$$rt-s^2 = 2-\frac{2}{4} > 0 \text{ y } r=-\sqrt{2}<0$$

luego $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ es un máximo local de g.

5. Si $(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$, se tiene, utilizando la ecuación (1), que

$$z=\frac{6-(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Luego f tiene su máximo (que, aceptamos, es global) en el punto

$$(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})\in A$$

y para una caja de estas dimensiones el volumen es

$$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}\,m^3.$$

6. *Bono*: el volumen de una caja con tapa de superficie total $12m^2$ es máximo cuando esa caja es un cubo.