MATE 1207 - Cálculo Vectorial
Solución del Parcial 1-B - 23/08/2010
Sección 21

1. *a*) Tenemos

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{PQ},$$

luego los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son colineales, lo que significa que los puntos P, Q y R son de una misma recta.

b) El vector $\overrightarrow{PQ}$, por ejemplo, es un vector director de esa recta.

c) La recta considerada es la única recta que pasa por $P = (1, 0, 0)$ y que tiene vector director $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Luego una parametrización de esta recta es

$$\{(1 - t, -t, -t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

2. *a*) Tenemos

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \overrightarrow{i} \\ 1 & 0 & \overrightarrow{j} \\ 0 & 1 & \overrightarrow{k} \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \neq 0,$$

luego P, Q y R no son de una misma recta.

b) El vector $\overrightarrow{n} := \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector normal al plano (PQR) y el punto $P = (1, 0, 0)$ pertenece al plano (PQR). Un punto $M = (x, y, z)$ pertenece al plano (PQR) si y sólo si

$$\overrightarrow{PM} \,.\, \overrightarrow{n} = 0,$$

luego

$$(x - 1) + y + z = 0$$

es una ecuación del plano (PQR), o de forma equivalente,

$$x + y + z = 1.$$

c) El plano (PQR) intersecta el plano de ecuación $z = 0$ si y sólo si el siguiente sistema tiene soluciones,

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ z & = & 0 \end{cases}.$$

Las soluciones de este sistema son

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & t \\ y & = & 1-t \end{array}\right.$$

con $t \in \mathbb{R}$. Luego

$$\{(t, 1-t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

es una parametrización de la recta de intersección de los planos (PQR) y $\{z = 0\}$.

3. *a*) La superficie $\mathcal{S}$ de ecuación $x^2 + z^2 = 1$ es un cilindro (de altura infinita) de eje y y de diámetro 2.

   b) Los puntos de intersección de $\mathcal{S}$ con el plano $\{y - z = 0\}$ son las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + z^2 & = & 1 \\ y - z & = & 0 \end{array}\right. .$$

   Las soluciones de este sistema son

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \cos t \\ y & = & \operatorname{sen} t \\ z & = & \operatorname{sen} t \end{array}\right.$$

   con $t \in \mathbb{R}$. Luego una parametrización de la curva de intersección de $\mathcal{S}$ con el plano $\mathcal{P}$ de ecuación $y - z = 0$ es

$$\{(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

4. *a*) Pongamos $x(t) = \cos t$, $y(t) = t$ y $z(t) = \operatorname{sen} t$, de tal manera que $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Para cualquier $t \in [0, 2\pi]$, tenemos

$$\big(x(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1,$$

   luego la curva $\mathcal{C}_f$ está contenida en el cilindro $\{x^2 + z^2 = 1\}$.

   b) Las tres componentes de f son derivables luego f es derivable y tenemos, para cualquier $t \in [0, 2\pi]$,

$$f'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) = \big(-\operatorname{sen} t, 1, \cos t\big).$$

   c) La recta tangente a la curva $\mathcal{C}_f$ en el punto $(0, \frac{\pi}{2}, 1) = f(\frac{\pi}{2})$ tiene vector director $f'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 1, 0)$, luego una parametrización de esta recta es

$$\{f(\frac{\pi}{2}) + tf'(\frac{\pi}{2}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(-t, \frac{\pi}{2} + t, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

d) La longitud de la curva $\mathcal{C}_f$ es

$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\|\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + 1 + \cos^2 t}\ dt \\
&= 2\pi\sqrt{2}
\end{aligned}
$$