

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MATE 1207 - Cálculo Vectorial
Solución del Parcial 1-A - 23/08/2010
Sección 21

1. a) Tenemos

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{PQ},$$

luego los vectores \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} son colineales, lo que significa que los puntos P , Q y R son de una misma recta.

- b) El vector \overrightarrow{PQ} , por ejemplo, es un vector director de esa recta.

- c) La recta considerada es la única recta que pasa por $P = (1, 0, 0)$ y

que tiene vector director $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego una parametrización

de esta recta es

$$\{(1-t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

2. a) Tenemos

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \vec{i} \\ -1 & 0 & \vec{j} \\ 0 & 1 & \vec{k} \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \neq 0,$$

luego P , Q y R no son de una misma recta.

- b) El vector $\vec{n} := \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es un vector normal al plano

(PQR) y el punto $P = (1, 0, 0)$ pertenece al plano (PQR) . Un punto $M = (x, y, z)$ pertenece al plano (PQR) si y sólo si

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0,$$

luego

$$-(x-1) + y - z = 0$$

es una ecuación del plano (PQR) , o de forma equivalente,

$$-x + y - z = -1.$$

- c) El plano (PQR) intersecta el plano de ecuación $z = 0$ si y sólo si el siguiente sistema tiene soluciones,

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Las soluciones de este sistema son

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Luego

$$\{(t, t - 1, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

es una parametrización de la recta de intersección de los planos (PQR) y $\{z = 0\}$.

3. a) La superficie \mathcal{S} de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro (de altura infinita) de eje z y de diámetro 2.
- b) Los puntos de intersección de \mathcal{S} con el plano $\{y - z = 0\}$ son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

Las soluciones de este sistema son

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \sin t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Luego una parametrización de la curva de intersección de \mathcal{S} con el plano \mathcal{P} de ecuación $y - z = 0$ es

$$\{(\cos t, \sin t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

4. a) Pongamos $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ y $z(t) = t$, de tal manera que $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Para cualquier $t \in [0, 2\pi]$, tenemos

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

luego la curva \mathcal{C}_f está contenida en el cilindro $\{x^2 + y^2 = 1\}$.

- b) Las tres componentes de f son derivables luego f es derivable y tenemos, para cualquier $t \in [0, 2\pi]$,

$$f'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

- c) La recta tangente a la curva \mathcal{C}_f en el punto $(0, 1, \frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2})$ tiene vector director $f'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0, 1)$, luego una parametrización de esta recta es

$$\{f(\frac{\pi}{2}) + t f'(\frac{\pi}{2}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(-t, 1, \frac{\pi}{2} + t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

d) La longitud de la curva \mathcal{C}_f es

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{cos}^2 t + 1} dt \\ &= 2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$
