UNIVERSIDAD DE LOS ANDES — DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MATE 1209 - Cálculo 3 (Economía, Administración)
Solución del cuarto parcial - 18/11/2010
Sección 1

Ejercicio 1

1. Ya que la función f es de clase C^2 sobre $\mathbb{R}^3$, para demostrar que es estrictamente convexa sobre $\mathbb{R}^3$, es suficiente demostrar que la forma cuadrática definida por $f''(x,y,z)$ es definida positiva en cualquier punto (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$. Se calcula

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2+x+2y+2z & -4+6y+2x+4z & -2+6z+2x+4y \end{pmatrix}$$

y

$$f''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática asociada a $f''(x,y,z)$ es

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= \begin{pmatrix} h & k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix} \\ &= h^2 + 6k^2 + 6l^2 + 4hk + 4hl + 8kl \end{aligned}$$

Para estudiar el signo de esta forma cuadrática, se puede por ejemplo hallar una reducción de Gauss de Q :

$$\begin{aligned} Q(h,k,l) &= h^2 + 6k^2 + 6l^2 + 4hk + 4hl + 8kl \\ &= (h+2k+2l)^2 - 4k^2 - 4l^2 - 4hk - 4hl - 8kl \\ &\quad +6k^2 + 6l^2 + 4hk + 4hl + 8kl \\ &= (h+2k+2l)^2 + 2k^2 + 2l^2. \end{aligned}$$

Q así escrita es una suma, con coeficientes positivos, de formas lineales independientes elevadas al cuadrado, por lo que Q es una forma cuadrática definidida positiva. *Quod erat demonstrandum.*

2. Siendo estrictamente convexa, f tiene un mínimo global sobre $\mathbb{R}^3$ si y sólo si tiene un punto crítico en $\mathbb{R}^3$. Los puntos críticos de f son las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + 2z &= -2 \\ 2x + 6y + 4z &= 4 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \end{aligned} \right.$$

La única solución de este sistema es

$$x = -16,\ y = 4,\ z = 3.$$

Luego f tiene un solo punto crítico, el punto $(-16, 4, 3)$. Ya que f es estricatmente convexa sobre $\mathbb{R}^3$, este punto crítico es un mínimo global sobre $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 2

1. Consideremos una empresa que quiere producir una cantidad q de algún bien económico a partir de K unidades de capital y L unidades de trabajo. Supongamos que el precio unitario del capital es 2 y que el precio unitario del trabajo es 5. Luego la función de costo de la empresa es

   $$C(K, L) = 2K + 5L.$$

   Se puede interpretar el problema planteado diciendo que se trata, para esta empresa, de minimizar el costo manteniendo un objetivo de producción de q unidades.

2. Sea $g(K, L) = 120KL - q$ la función que define la restricción en el problema. Para K y L positivos, la derivada de g no es 0, entonces podemos aplicar el teorema de Lagrange y obtener que, si C tiene un extremo local bajo la restricción $g(K, L) = 0$ en un punto (K, L), existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que (K, L, λ) sea solución del siguiente sistema:

   $$\left\{ \begin{array}{ccc} 2 & = & \lambda 120L \\ 5 & = & \lambda 120K \\ 120KL & = & q \end{array} \right.$$

   Este sistema tiene como única solución

   $$K = \frac{\sqrt{3q}}{12},\ L = \frac{\sqrt{3q}}{30},\ \lambda = \frac{\sqrt{3q}}{6}.$$

3. La función de costo mínimo de la empresa, en función del objetivo de producción q, es la función

   $$C^*(q) = C(\frac{\sqrt{3q}}{12}, \frac{\sqrt{3q}}{30}) = \frac{\sqrt{3q}}{3}.$$

4. La derivada de la función C^* es

   $$(C^*)'(q) = \frac{\sqrt{3q}}{6}.$$

   Luego, cuando el objetivo de producción aumenta de una unidad, el costo de producción aumenta aproximadamente de $\frac{\sqrt{3q}}{6}$ unidades.

Ejercicio 3

1. La función que representa lo que gana la empresa es

$$\pi(K, L, p, r, w) = pP(K, L) - rK - wL.$$

2. Se tiene

$$\pi^*(p, r, w) = \pi(K^*, L^*, p, r, w) = pP(K^*, L^*) - rK^* - wL^*.$$

Por el teorema de la envolvente, se tiene

$$\frac{\partial \pi^*}{\partial r} = -K^*.$$

También se puede calcular directamente la derivada de π^* con respecto a la variable r, utilizando que (K^*, L^*) es solución del sistema

$$\begin{aligned} p\frac{\partial P}{\partial K}(K, L) &= r, \\ p\frac{\partial P}{\partial L}(K, L) &= w. \end{aligned}$$

De cualquier forma, eso muestra que cuando el precio unitario del capital aumenta de una unidad, lo que gana la empresa disminuye aproximadamente de K^* unidades.