Universidad de los Andes Departamento de Matemáticas

MATE 1209 - Cálculo 3 (Economía, Administración)

Solución del tercer parcial - 28/10/2010

Sección 1

Ejercicio 1

1. La región de integración D es un cuarto disco de centro $(0,0)$ y de radio R. En coordenadas polares

$$D = \left\{(r,\theta) \in [0;+\infty[\times[0;2\pi] \mid r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Luego, pasando a coordenadas polares y utilizando el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy &= \iint_{[0;R]\times[0;\frac{\pi}{2}]} rdrd\theta \\ &= \left(\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) \\ &= \left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=R} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi R^3}{6}. \end{aligned}$$

2. La integral

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy$$

de la pregunta anterior calcula el volumen de la octava parte de la bola de $\mathbb{R}^3$ de centro $(0,0,0)$ y de radio R. Luego el volumen de esa bola es

$$8 \times \frac{\pi R^3}{6} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ejercicio 2

1. Los puntos de intersección de la recta de ecuación $y = x+2$ con la parábola de ecuación $y = x^2$ son $(-1,1)$ y $(2,4)$.

2. La región de integración S tiene la siguiente descripción

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x+2\}.$$

Luego, por Fubini,

$$\begin{aligned}
\iint_S y dx dy &= \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2}^{x+2} y dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} \left[(x+2)^2 - x^4 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{4^3}{3} - \frac{2^5}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{63}{3} - \frac{33}{5} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[21 - \frac{33}{5} \right] \\
&= \frac{72}{10} \\
&= \frac{36}{5}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

1. La función f es continua sobre el subespacio cerrado y acotado D de $\mathbb{R}^2$ (D es el disco de centro $(0,0)$ y de radio 5), por lo que f tiene un máximo global y un mínimo global sobre D.

2. *a*) A es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y f es de clase C^2 sobre A. Los puntos críticos de f sobre A son las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4 - 4x &=& 0 \\ -4y &=& 0 \end{array} \right.$$

luego el único punto crítico de f sobre A es $(1,0)$. En $(1,0)$, la segunda derivada de f es

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

luego, en las notaciones de Monge, $rt - s^2 = (-4)(-4) - 0 = 16 > 0$ y $r = -4 < 0$, por lo que f tiene un máximo local en $(1,0)$.

b) Se puede notar que la función f es continua sobre el subespacio cerrado y acotado B de $\mathbb{R}^2$ (B es el círculo de centro $(0,0)$ y de radio 5), por lo que f tiene un máximo global y un mínimo global sobre B. Para hallar el máximo y el mínimo de f sobre $B = g^{-1}(\{0\})$, donde $g : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 25$, se usa el teorema de Lagrange (se puede porque $g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$ nunca es $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ sobre B). Se sabe, por ese teorema, que el máximo y el mínimo de f sobre B tienen que cumplir con la siguiente condición:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \left\{ \begin{array}{rcl} 4-4x & = & 2\lambda x \\ -4y & = & 2\lambda y \\ x^2+y^2 & = & 25 \end{array} \right. .$$

En el caso presente, este sistema es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4-4x & = & 2\lambda x \\ -4y & = & 2\lambda y \\ x^2+y^2 & = & 25 \end{array} \right. .$$

Si $y \neq 0$, la segunda ecuación nos da $\lambda = -2$, luego $-4 = 0$ en la primera ecuación, lo que es absurdo. Por lo tanto, $y = 0$ y, usando la tercera ecuación, se obtiene que $x = 5$ o -5. Ya que $f(5,0) = 20 - 50 - 0 = -30$ y $f(-5,0) = -20 - 50 - 0 = -70$, f tiene su máximo global sobre B en el punto $(5,0)$ y su mínimo global sobre B en el punto $(-5,0)$.

c) Comparando los resultados obtenidos en a) y en b), vemos que

$$f(1,0) = 4,\ f(5,0) = -30 \text{ y } f(-5,0) = -70.$$

Luego f tiene su máximo **global** sobre D en el punto $(1,0)$ y su mínimo global sobre D en el punto $(-5,0)$.