

Ejercicio (9 puntos)

1. La función f es derivable sobre \mathbb{R}^2 . Los puntos críticos de f son, por definición, las soluciones (x, y) del siguiente sistema :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

En este caso, el sistema es

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$$

y tiene como soluciones

$$(0, 0), (1, 1) \text{ y } (-1, -1).$$

2. La función f es de clase C^2 sobre \mathbb{R}^2 , luego podemos utilizar el criterio de la segunda derivada para decir si los puntos críticos de f son máximos o mínimos locales, o puntos silla. Se tiene que

$$f''(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, utilizando las notaciones de Monge, se tiene

- en $(0, 0)$: $rt - s^2 = 0 - 16 < 0$ luego $(0, 0)$ es un punto silla.
- en $(1, 1)$: $rt - s^2 = 144 - 16 > 0$ y $r = 12 > 0$ luego $(1, 1)$ es un mínimo local.
- en $(-1, -1)$: $rt - s^2 = 144 - 16 > 0$ y $r = 12 > 0$ luego $(-1, -1)$ es un mínimo local.

3. Se tiene que $g(t) = f(t, t) = 2t^4 - 4t^2 + 1$, luego

$$g'(t) = 8t^3 - 8 = 8t(t - 1)(t + 1)$$

y el signo de g' es así :

t	-1	0	1	
$g'(t)$	-	0	+	0
	-	0	-	0
	+	0	+	

4. Se tiene que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$ luego f no tiene un máximo global sobre \mathbb{R}^2 . También se puede notar que f no tiene máximo local sobre \mathbb{R}^2 , por lo que no puede tener máximo global.

Problema (11 puntos)

1. El volumen de una caja con tapa de lados $x, y, z > 0$ (longitudes expresadas en metros) es $f(x, y, z) = xyz$ y el área de esa caja es $2xy + 2yz + 2zx$. Luego, maximizar el volumen de una caja de lados x, y, z construida con $12m^2$ de madera es equivalente a maximizar la función f sobre el conjunto

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2xy + 2yz + 2zx = 12 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{cases} \right\}.$$

2. Despejando z en la ecuación $2xy + 2yz + 2zx = 12$, viene

$$z = \frac{(6 - xy)}{x + y}. \quad (1)$$

Luego, maximizar f sobre A es equivalente a maximizar la función

$$g : (x, y) \mapsto f\left(x, y, \frac{(6 - xy)}{x + y}\right) = \frac{xy(6 - xy)}{x + y} = \frac{6xy - x^2y^2}{x + y}$$

sobre el abierto

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$$

de \mathbb{R}^2 .

3. La función g es derivable sobre \mathcal{U} . Los puntos críticos de g son, por definición, las soluciones (x, y) del siguiente sistema :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

En este caso, el sistema es

$$\begin{cases} \frac{y^2}{(x+y)^2}(6 - x^2 - 2xy) = 0 \\ \frac{x^2}{(x+y)^2}(6 - y^2 - 2xy) = 0 \end{cases}$$

y tiene como única solución en \mathcal{U} el punto

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

4. La función g es de clase C^2 sobre \mathcal{U} , luego podemos utilizar el criterio de la segunda derivada para decir si el punto crítico de g es un máximo o mínimo local, o un punto silla. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{(-2xy^2 - 2y^3)(x + y)^2 - (6y^2 - x^2y^2 - 2xy^3)2(x + y)}{(x + y)^4} \\ &= \frac{-2y^2(6 + y^2)}{(x + y)^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{(-2x^2y - 2x^3)(x + y)^2 - (6x^2 - x^2y^2 - 2x^3y)2(x + y)}{(x + y)^4} \\ &= \frac{-2x^2(6 + x^2)}{(x + y)^3},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) \\ &= \frac{(12y - 2x^2y - 6xy^2)(x + y)^2 - (6y^2 - x^2y^2 - 2xy^3)2(x + y)}{(x + y)^4} \\ &= \frac{12xy - 2x^3y - 2xy^3 - 6x^2y^2}{(x + y)^3},\end{aligned}$$

luego

$$f''(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en las notaciones de Monge, se tiene que, en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

$$rt - s^2 = 2 - \frac{2}{4} > 0 \text{ y } r = -\sqrt{2} < 0$$

luego $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ es un máximo local de g .

5. Si $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, se tiene, utilizando la ecuación (1), que

$$z = \frac{6 - (\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Luego f tiene su máximo (que, aceptamos, es global) en el punto

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \in A$$

y para una caja de estas dimensiones el volumen es

$$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}m^3.$$

6. *Bono*: el volumen de una caja con tapa de superficie total $12m^2$ es máximo cuando esa caja es un cubo.