Universidad de los Andes — Departamento de Matemáticas

MATE 1209 - Cálculo 3 (Economía, Administración)

Parcial 1 - 26/08/2010

Sección 1

Nombre:
Código:
Sección complementaria:

Tiempo: 75 minutos. *Redacte en forma completa su análisis si desea recibir el máximo valor en cada punto. Respuesta sin justificar se invalida.* ***Las calculadoras están prohibidas.***

Ejercicio (8 puntos)

Sea f la función

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Mostrar que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$. (2 puntos)
2. Justificar brevemente que f es derivable sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ para cualquier $(x,y) \neq (0,0)$. (2 puntos)
3. Volviendo a la definición de las derivadas parciales, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. (2 puntos)
4. Mostrar que las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas sobre $\mathbb{R}^2$. (1 punto)
5. Concluir que f es derivable sobre $\mathbb{R}^2$ y que $f'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$. (1 punto)
6. *Bono: dar una aproximación lineal al orden uno de f en una vecindad del punto* $(1,1)$. (2 puntos)

Problema (12 puntos)

Se considera, para $K > 0$ y $L > 0$, la siguiente función de producción

$$P : (K,L) \mapsto K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$$

y se interpreta K como el capital y L como el trabajo.

1. Mostrar que la curva de nivel 1 de P es la curva de ecuación $L = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Dibujar esta curva de nivel en el plano $\mathbb{R}^2$ con coordenadas K, L. (3 puntos)
2. Mostrar que la tasa marginal de substitución del capital al trabajo en el punto (K,L) es
$$TMS(K,L) = -\frac{1}{2}\frac{L}{K}.$$
(3 puntos)

3. Dar una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel $P(K, L) = 1$ en el punto $(1, 1)$. Representar esta recta en el dibujo anterior. (2 puntos)

4. Calcular la elasticidad parcial de la producción respecto al capital. (2 puntos) *Bono: interpretar el resultado.* (2 puntos)

5. ¿ Es más elástica le producción respecto al capital o respecto al trabajo? (1 punto)

6. Determinar una función $g(t)$ tal que, en cualquier punto (K, L), uno tenga

$$\frac{L}{K} = g\big(TMS(K, L)\big).$$

   Deducir de eso que la elasticidad de substitución del capital al trabajo a lo largo de una curva de nivel dada de P es $\sigma_{KL} = 1$. (1 punto)