MATE 1209 - Cálculo 3 (Economía, Administración)
Solución del primer parcial - 26/08/2010
Sección 1

Ejercicio (8 puntos)

1. La función f es continua sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ como cociente, cuyo denominator no se anula, de funciones continuas sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De ahí, para demostrar que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$, es suficiente demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Pasando a coordenadas polares, tenemos, para cualquier $r \neq 0$,

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = \left|\frac{r^4(\cos^3\theta\sin\theta - \cos\theta\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\right| \leq r^2 \times 2 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Luego

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 = f(0,0)$$

y f es continua sobre $\mathbb{R}^2$.

2. La función f es derivable sobre $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ como cociente, cuyo denominator no se anula, de funciones derivables sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Para cualquier $(x,y) \neq (0,0)$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

3. Por definición, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}.$$

Pero $f(h,0) = 0$ para cualquier h. Luego $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De manera similar, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

4. La función $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ como cociente, cuyo denominator no se anula, de funciones continuas sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De ahí, para demostrar que f es continua sobre $\mathbb{R}^2$, es suficiente demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

Pasando a coordenadas polares, tenemos, para cualquier $r \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\right| &= \left|\frac{r^5(\cos^4\theta\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin^3\theta - \sin^5\theta)}{r^4(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}\right| \\ &\leq r \times 6 \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

y $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua sobre $\mathbb{R}^2$. De manera similar, $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua sobre $\mathbb{R}^2$.

5. La función f tiene derivadas parciales en cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ y estas derivadas parciales son continuas sobre $\mathbb{R}^2$. Luego f es derivable sobre $\mathbb{R}^2$ y

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Una aproximación lineal al orden uno de f en una vecindad del punto $(1,1)$ es

$$f(1+h,1+k) \simeq f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,k = 0 + 1\times h - 1\times k = h - k.$$

Problema (12 puntos)

1. Por definición, la curva de nivel 1 de P es la curva de ecuación $P(K,L) = 1$. Puesto que $P(K,L) = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, la curva de nivel $P(K,L) = 1$ es la curva de ecuación $L = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

2. Por definición, la tasa marginal de substitución del capital al trabajo en el punto (K,L) es

$$TMS(K,L) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial K}(K,L)}{\frac{\partial P}{\partial L}(K,L)} = -\frac{\frac{1}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}\frac{L}{K}.$$

Esto se puede interpretar diciendo que cuando uno agrega una unidad (infinitesimal) de capital, se puede quitar media unidad de trabajo sin que cambie el nivel de producción.

3. La recta tangente a la curva de nivel $P(K,L) = 1$ en el punto $(1,1)$ es la recta de ecuación

$$L = 1 + TMS(1,1)(K-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}K.$$

4. Por definición, la elasticidad parcial de la producción con respecto al capital es

$$E\ell_K P(K,L) = \frac{K}{P(K,L)} \frac{\partial P}{\partial K}(K,L) = \frac{K}{K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{3} K^{-\frac{2}{3}} L^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

   Esto se puede interpretar diciendo que un cambio del $n\,\%$ en el capital produce un cambio del $\frac{n}{3}\,\%$ en la producción.

5. Por un cálculo similar al anterior, tenemos $E\ell_L P(K,L) = \frac{2}{3}$, de tal forma que $E\ell_L P(K,L) > E\ell_K P(K,L)$ y esto significa que la producción es más elástica (o, en este caso, menos inelástica) con respecto al trabajo que con respecto al capital: un cambio del $n\,\%$ en el trabajo produce un cambio dos veces más importante en la producción que un cambio del $n\,\%$ en el capital.

6. Teníamos $TMS(K,L) = -\frac{1}{2}\frac{L}{K}$, luego

$$\frac{L}{K} = -2 \times TMS(K,L).$$

   Si llamamos g la función $t \mapsto -2t$, tenemos

$$\frac{L}{K} = g\big(TMS(K,L)\big).$$

   Por definición, la elasticidad de substitución del capital al trabajo a lo largo de una curva de nivel dada de P es

$$\sigma_{KL} = E\ell_t g(t) = \frac{t}{g(t)} g'(t) = \frac{t}{-2t}(-2) = 1.$$

   Esto se puede interpretar diciendo que, a nivel de producción fijo, un cambio del $n\,\%$ en la tasa marginal de substitución produce un cambio del $n\,\%$ en la razón $\frac{L}{K}$.