ÁLGEBRA LINEAL **TAREA 3**
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Semestre 2025-10

Ejercicio 1. Determine si el conjunto $H = \{p(x) \in P_3 : p'(2) = 0\}$ es un subespacio vectorial del espacio P_3 de polinomios de grado menor o igual a 3. ¿Cuál es su dimensión? ¿Cuál podría ser una base?

Ejercicio 2. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial dado:

(a) $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x, \cos(2x)\}$ como subconjunto del espacio $\mathcal{F}$ de funciones reales.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ como subconjunto del espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $\{x, x^2 + 1, (x-1)^2\}$ como subconjunto del espacio de polinomios $P_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 3. Determine si las siguientes funciones son transformaciones lineales. En caso afirmativo, encuentre su matriz de representación, núcleo, imagen y rango.

1. La función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T[x, y, z] = [2x - y + z, x + y - 3z, -x - 2z]$
2. La función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T[x, y] = [x + y^2, 2y]$.
3. La función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T[x, y, z] = [x - y + 2z, -2x + 2y - 4z]$.

Ejercicio 4. Determinar una expresión general para una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que refleja los vectores del plano con respecto a la recta $y = -x$. Construír la matriz estándar de la transformación y de su inversa.

Ejercicio 5. Construír las siguientes funciones:

1. Una transformación lineal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuyo núcleo sea el subespacio de las matrices diagonales.
2. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que sea uno a uno. Hallar núcleo e imagen.
3. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ que sea sobre. Hallar núcleo e imagen.
4. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que no sea biyectiva.
5. Una transformación lineal de $\mathbb{P}_3$ en $\mathbb{P}_3$ cuya imagen sea el subespacio $\operatorname{span}(1, 1 + x)$.

Ejercicio 6. Sea $T : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathbb{P}_3$. Se sabe además que $T(1) = (0, 0, 0), T(x) = (1, 1, -1), T(x^2) = (-1, 0, 1), T(x^3) = (1, 1, 0)$.

1. Hallar $T(5 - x + 3x^2 - 2x^3)$.
2. Determinar $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$ para cualquier polinomio de $\mathbb{P}_3$.
3. Hallar el núcleo y la imagen de la transformación.

Ejercicio 7. Considere el espacio vectorial $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que f' existe y es continua.

1. Muestre que $W = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : f' \equiv 0\}$ es un subespacio de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. ¿Cuál es la dimensión de W?
2. Determine si $T : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, definida por $T(f(x)) = xf'(x) + f(x)$, es una transformación lineal.

Ejercicio 8. Encuentre la matriz de representación de las siguientes transformaciones con respecto a las bases dadas:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T([x, y, z]) = [x + y, y - 3z]$, con $\mathcal{B} = \{[1, 1, 1], [1, 1, 0], [1, -1, 0]\}$ y $\mathcal{B}' = \{[1, 2], [2, -1]\}$.

(b) $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde P_W representa la proyección sobre el plano $W : x - 2y + z = 0$, con $\mathcal{B} = \{[1, 2, -1], [-1, -1, 0], [0, 1, 1]\}$ y $\mathcal{B}' = \{[1, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]\}$.

Ejercicio 9. En cada uno de los siguientes casos encuentre:

(1) Una base ortonormal para W.	(3) La proyección $\text{proy}_W(\boldsymbol{v})$
(2) El subespacio $W^\perp$ de $\mathbb{R}^n$.	(4) La descomposición $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{h}$ donde $\boldsymbol{p} \in W$ y $\boldsymbol{h} \in W^\perp$.

(a) $W = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$, $\boldsymbol{v} = [-1, 2]$.

(b) $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0\}$, $\boldsymbol{v} = [-3, 1, 4]$.

(c) $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\}$, $\boldsymbol{v} = [1, 1, 1]$.

(d) $W = \{[x, y, z, w] \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - 2w = 0\}$, $\boldsymbol{v} = [1, -1, 2, 3]$.

Ejercicio 10. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si $H_1 \subseteq H_2$ entonces $H_2^\perp \subseteq H_1^\perp$

Ejercicio 11. (Verdadero-Falso) Estudie las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas, explicando claramente su respuesta. En particular, realice una *demostración* o encuentre un *contraejemplo* según sea el caso.

(a) La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x + 4y \\ 2x + y \end{bmatrix}$ es una transformación lineal uno a uno.

(c) En $\mathbb{R}^3$ la reflexión respecto al plano yz es una transformación lineal uno a uno.

(d) La transformación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, -x)$ refleja un vector primero con respecto a la recta $y = x$ y con respecto al eje x.

(e) Sea B una matriz fija de tamaño 2×2 y se define la función $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ por $T(A) = BA$. Entonces T es lineal y uno a uno.

(g) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = \{[x, y, z] : 2x - y + z = 0\}$.

(j) No existe una transformación lineal de $\mathcal{P}_4$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}$ que sea inyectiva.