ÁLGEBRA LINEAL **TAREA 2**
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Semestre 2025-10

Ejercicio 1. Calcule los siguientes determinantes:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{vmatrix} \qquad (c)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2. Demostrar que la ecuación de un plano que pasa por los puntos no colineales (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) y (a_3, b_3, c_3) se puede escribir como:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ejercicio 3. Sea θ un número real. Demuestre que $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ es invertible, y halle su inversa.

Ejercicio 4. ¿Para qué valores de α la siguiente matriz no es invertible?

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & \alpha \\ 3 & \alpha - 1 & 2 - \alpha \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Sea el sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine la solución del sistema utilizando la regla de Cramer.

(b) Calcule la inversa de A mediante la matriz adjunta. Halle la solución del sistema utilizando la matriz A^{-1}.

Ejercicio 6. Demuestre que para toda matriz A de tamaño $n \times n$ se tiene que $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det A)^{n-1}$, donde $\operatorname{adj}(A)$ representa la matriz adjunta de A.

Ejercicio 7. Sean A, B, C matrices de tamaño 3×3 tales que $\det(A) = 5$, $\det(B) = -2$ y $\det(C) = 7$. Encuentre el determinante de las siguientes matrices:

(a) $(A + A + A) \cdot B(C + C + C)$

(b) $A^{-1} \cdot B^T$

(c) $(2B)^{-1}$

(d) $EB^{-1}AC$, donde $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 8. Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$, con la suma y la multiplicación por escalar definidas de la siguiente manera:

$$\text{Suma: } [x,y] \oplus [a,b] = [x+a+1, y+b]$$
$$\text{Producto por escalar: } r \odot [x,y] = [r\cdot x + r - 1, r\cdot y]$$

Determine si $V = (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En caso afirmativo, ¿Cuál sería el vector $\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$? ¿Cuál sería el opuesto aditivo del vector $[x,y]$ en V?

Ejercicio 9. Determine si el conjunto $H = \{p(x) \in P_3 : p'(2) = 0\}$ es un subespacio vectorial del espacio P_3 de polinomios de grado menor o igual a 3. ¿Cuál es su dimensión? ¿Cuál podría ser una base?

Ejercicio 10. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$, justificando claramente su respuesta. En caso afirmativo, encuentre una base para el subespacio y determine su dimensión.

(a) $H = \text{span}([1,0,2],[0,2,3],[-1,2,1],[-2,0,4])$.

(b) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \text{ es ortogonal al vector } (-3,5,1)\}$.

(c) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y^2 + z = 0\}$.

Ejercicio 11. (VERDADERO-FALSO) Estudie las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas, explicando claramente su respuesta. En particular, realice una *demostración* o encuentre un *contraejemplo* según sea el caso.

(a) Si A es una matriz cuadrada tal que $A^{n+1} = 0$, entonces

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n.$$

(b) Para cualesquiera reales $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se tiene que $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0.$

(c) Todo espacio vectorial tiene al menos dos elementos.

(d) Los vectores de coordenadas $(3,1,4), (2,5,6)$ y $(1,4,8)$ constituyen una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

(e) El polinomio $p(x) = 2x - 1$ pertenece al subespacio generado por los polinomios

$$\{-5x^2 - 2, -6x^2 - 9x + 8, -x^2 - 7x + 9\}.$$

(f) Siempre que a, b, c sean reales distintos, los vectores $\{(1,a,a^2),(1,b,b^2),(1,c,c^2)\}$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.