ÁLGEBRA LINEAL **TAREA 1**
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES
Semestre 2025-10

Ejercicio 1. Calcule la distancia del punto $(4,1)$ a la recta $2y - x = 0$, realizando el siguiente procedimiento:

(a) Encuentre un vector $\boldsymbol{v}$ no nulo contenido en la recta $2y - x = 0$.

(b) Calcule la proyección $\boldsymbol{p}$ del vector $\boldsymbol{u} = (4,1)$ sobre el vector $\boldsymbol{v}$.

(c) Encuentre el vector $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}$.

(d) Realice una gráfica donde aparezcan el punto $(4,1)$, la recta $2y - x = 0$, y los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}$.

(e) Encuentre la magnitud del vector $\boldsymbol{h}$.

Ejercicio 2. En cada caso, encuentre el producto cruz $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$:

$$(a)\ \boldsymbol{u} = (1,-1,0), \boldsymbol{v} = (2,-3,0) \qquad\qquad (b)\ \boldsymbol{u} = (1,1,-1), \boldsymbol{v} = \left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$$

Ejercicio 3. Considere los puntos $A = (1,2,1), B = (2,2,2), C = (2,1,3), D = (1,1,2)$ en $\mathbb{R}^3$.

(a) Demuestre que los vértices A, B, C, D forman un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcule el área del paralelogramo con vértices A, B, C, D.

Ejercicio 4. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determinando si tienen única solución, infinitas soluciones, o si son inconsistentes.

$$(a) \begin{cases} -2x_1 + x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -3 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{cases} \qquad (c) \begin{cases} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{cases}$$

Ejercicio 5. ¿Para qué valores de k el siguiente sistema tiene soluciones no triviales [1]?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Determine en cada uno de los siguientes casos si las rectas L_1 y L_2 se intersectan en algún punto, son paralelas, o alabeadas[2]:

$$(a)\ L_1 := \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} ;\ L_2 := \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 1 \end{cases} \qquad (b)\ L_1 := \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} ;\ L_2 = \begin{cases} x = s \\ y = 3 - \frac{1}{2}s \\ z = 2 + \frac{1}{2}s \end{cases}$$

Ejercicio 7.

[1] Una solución es no-trivial si es diferente al vector $\mathbf{0} = (0,0,0)$.

[2] Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ se dicen *alabeadas* si no son paralelas pero tampoco se intersectan.

(a) Encuentre la ecuación cartesiana del plano que pasa por el origen y contiene a la recta

$$L := \langle x = 1 - t, y = -t, z = 2 + t \rangle$$

(b) Encuentre la ecuación cartesiana del plano determinado por todos los puntos que están a la misma distancia de $\boldsymbol{A} = (4, -4, 3)$ y $\boldsymbol{B} = (2, 0, 1)$.

Ejercicio 8. Determine si las siguientes matrices son invertibles o no. En caso de que sean invertibles, diga cuál es su inversa.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 9. Demuestre que para toda matriz invertible 2×2 se tiene que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 10. VERDADERO-FALSO Estudie las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas, explicando claramente su respuesta. En particular, realice una *demostración* o encuentre un *contraejemplo* según sea el caso.

(a) Cualquier vector ortogonal a $\boldsymbol{u} = \left(1, -\frac{1}{2}, 1\right)$ es paralelo al plano $2x - y + z = 3$.

(b) Tres vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ están en una misma recta si y sólo si $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.

(c) Todo sistema lineal con un mismo número de ecuaciones y variables tiene una única solución.

(d) Todo sistema lineal homogéneo con más variables que ecuaciones tiene infinitas soluciones.

(e) Todo sistema lineal con más variables que ecuaciones tiene al menos una solución.

(f) Si A y B son matrices cuadradas tales que $AB = \boldsymbol{0}$, entonces $A = \boldsymbol{0}$ ó $B = \boldsymbol{0}$.

(g) La recta intersección de los planos $x + 4y - 3z = 3$ y $2x - y + 5z = -3$ pasa por el punto $(-1, 1, 0)$.