EJERCICIOS PROPUESTOS	**ÁLGEBRA LINEAL**
Universidad de los Andes	**Semanas 1 Y 2**

Sistemas de ecuaciones 2×2

Ejercicio 1. Suponga que los puntos $(1,5), (-1,3)$ y $(0,1)$ están sobre la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Con esta información, determine los valores de a, b, c.

Para este ejercicio puede utilizar cualquier método, pero sería un gran ejercicio plantear un sistema de tre ecuaciones y resolverlo usando Gauss-Jordan.

Ejercicio 2. Describa todas las parábolas que pasan por los puntos $(1,1)$ y $(1,4)$.

Vectores en el plano

Ejercicio 3. Calcule la magnitud y dirección de los siguientes vectores:

$$(a)\ \boldsymbol{v} = (3,4) \qquad (b)\ \boldsymbol{v} = (-2\sqrt{3}, -2) \qquad (c)\ \boldsymbol{v} = (3,-3) \qquad (v)\ \boldsymbol{u} = (-15, 5\sqrt{3})$$

Ejercicio 4. En cada caso, determine si los vectores son ortogonales o paralelos. En caso de que no sea ninguno, calcule el ángulo entre los vectores.

$$(a)\ \boldsymbol{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), \boldsymbol{v} = (\sqrt{3}, 1) \qquad (b)\ \boldsymbol{u} = (-1,1), \boldsymbol{v} = 5 \cdot (1, \sqrt{3})$$
$$(c)\ \boldsymbol{u} = (5,1),\ \boldsymbol{v} = (3,-15) \qquad (d)\ \boldsymbol{u} = (-1,1), \boldsymbol{v} = (2,-2)$$

Ejercicio 5. En cada caso, calcule la proyección del vector $\boldsymbol{u}$ sobre el vector $\boldsymbol{v}$.

$$(a)\ \boldsymbol{u} = (3,5), \boldsymbol{v} = (-1,0) \qquad (b)\ \boldsymbol{u} = (-1,1), \boldsymbol{v} = (3,0) \qquad (c)\ \boldsymbol{u} = 3\boldsymbol{i}, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

Ejercicio 6. Calcule la distancia del punto $(4,1)$ a la recta $2y - x = 0$, realizando el siguiente procedimiento:

(a) Encuentre un vector $\boldsymbol{v}$ no nulo contenido en la recta $2y - x = 0$.

(b) Calcule la proyección $\boldsymbol{p}$ del vector $\boldsymbol{u} = (4,1)$ sobre el vector $\boldsymbol{v}$.

(c) Encuentre el vector $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{p}$.

(d) Realice una gráfica donde aparezcan el punto $(4,1)$, la recta $2y - x = 0$, y los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{h}$.

(e) Encuentre la magnitud del vector $\boldsymbol{h}$.

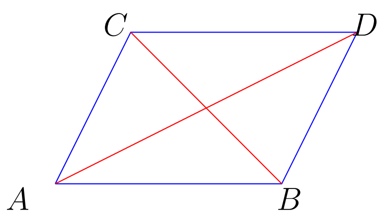
Ejercicio 7. Considere los vectores $\boldsymbol{u} = (1,3)$ y $\boldsymbol{v} = (5,2)$.

(a) Calcule las proyecciones $\text{proy}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v})$ y $\text{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u})$, realizan un dibujo en el plano de todos estos vectores.

(b) ¿Cómo podemos describir geométricamente el conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{w}$ tales que $||\operatorname{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})|| = 0$.

(c) ¿Cómo podemos describir geométricamente el conjunto de todos los vectores $\boldsymbol{w}$ tales que $||\operatorname{proy}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{w})|| = 2$.

Ejercicio 8. Utilice expresiones vectoriales para demostrar la *ley del paralelogramo*: En un paralelogramo, la suma de los cuadrados de las dos diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los lados.



$$|AD|^2 + |BC|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 + |AC|^2 + |CD|^2.$$

Vectores en el espacio y producto cruz

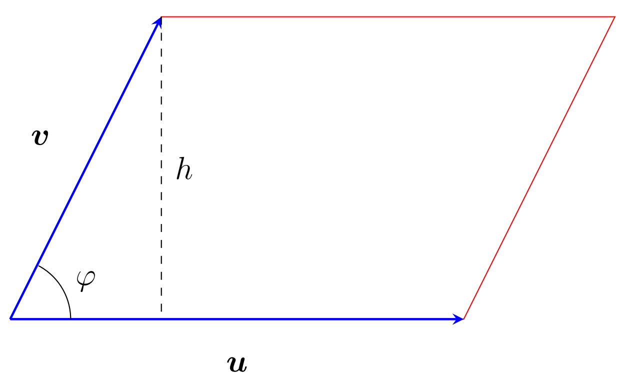
Ejercicio 9. En cada caso, encuentre el producto cruz $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$:

(a) $\boldsymbol{u} = (1, -1, 0), \boldsymbol{v} = (2, -3, 0)$ $\qquad$ (b) $\boldsymbol{u} = (1, 1, -1), \boldsymbol{v} = (0, \frac{1}{2}, -1)$

(c) $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1), \boldsymbol{v} = (-5, 10, 5)$ $\qquad$ (d) $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1), \boldsymbol{v} = (0, 1, 2)$

Ejercicio 10. Utilice las propiedades del producto cruz en $\mathbb{R}^3$ para demostrar que el área de un paralelogramo con vectores adyacentes $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es:

$$\text{Área} \quad = ||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||$$



Ejercicio 11. Considere los puntos $A = (1, 2, 1), B = (2, 2, 2), C = (2, 1, 3), D = (1, 1, 2)$ en $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine si los vértices A, B, C, D forman un paralelogramo en $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcule el área del paralelogramo con vértices A, B, C, D.

Ejercicio 12. Supongamos que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ son vectores adyacentes de un paralelepípedo $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$.

1. Suponiendo que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ son vectores en la base, encuentre una fórmula para el vector altura $\boldsymbol{h}$.

2. Demuestre que el volumen de $\mathcal{P}$ puede calcularse con el triple producto vectorial:

$$\text{volumen}(\mathcal{P}) = |(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}|.$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 13. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determinando si tienen única solución, infinitas soluciones, o si son inconsistentes.

$$(a) \begin{cases} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{cases} \qquad (d) \begin{cases} -2x_1 + x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{cases} \qquad (e) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{cases} \qquad (f) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{cases}$$

Ejercicio 14. Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó \$30 diarios en Inglaterra, \$20 diarios en Francia y \$20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó \$20 diarios en Inglaterra, \$30 diarios en Francia y \$20 diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de \$10 diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de \$340 en hospedaje, \$320 en comida y \$140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

Ejercicio 15. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que este sistema es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

Ejercicio 16. ¿Para qué valores de k el siguiente sistema tiene soluciones no triviales?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

Verdadero-Falso

Ejercicio 17. Estudiar las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas, explicando claramente su respuesta. En particular, realice una *demostración* o encuentre un *contraejemplo* según sea el caso.

(a) Si los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{r}$ de $\mathbb{R}^3$ están en un mismo plano, entonces

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}) = \mathbf{0}.$$

(b) Cualquier vector ortogonal a $\boldsymbol{u} = (1, -\frac{1}{2}, 1)$ es paralelo al plano $2x - y + z = 3$.

(c) Tres vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ están en una misma recta si y sólo si $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$.

(d) Todo sistema lineal con un mismo número de ecuaciones y variables tiene una única solución.

(e) Todo sistema lineal homogéneo con más variables que ecuaciones tiene infinitas soluciones.

(f) Todo sistema lineal con más variables que ecuaciones tiene al menos una solución.

(g) Un sistema lineal consistente con matriz de coeficientes A tiene una única solución si y sólo si cada columna en la forma escalonada reducida de A tiene un pivote.

EJERCICIOS PROPUESTOS ÁLGEBRA LINEAL
Universidad de los Andes Semana 3

Ejercicio 1. Sean $\mathbf{0} = (0,0,0), \mathbf{A} = (0,2,0)$ y $\mathbf{B} = (1,1,1)$ en $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\mathbf{0}$ y $\mathbf{B}$.

(b) Muestre que el vector $\boldsymbol{v} = [1,0,-1]$ es perpendicular a los vectores $\mathbf{0A}$ y $\mathbf{0B}$.

(c) Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $\mathbf{0}$, $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.

Ejercicio 2. Determine si las rectas L_1 y L_2 se intersectan en algún punto, son paralelas, o alabeadas [1]:

$$(a)\ L_1 := \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} ; L_2 := \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 1 \end{cases} \qquad (b)\ L_1 := \begin{cases} x = 1-2t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases} ; L_2 = \begin{cases} x = s \\ y = 3 - \frac{1}{2}s \\ z = 2 + \frac{1}{2}s \end{cases}$$

$$(c)\ L_1 := \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ -3-t \end{cases} ; L_2 := \begin{cases} x = 3+2s \\ y = 3+s \\ z = -2+s \end{cases} \qquad (d)\ L_1 := \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} ; L_2 = \begin{cases} x = t \\ y = 3-t \\ z = 5t-2 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Encuentre la ecuación cartesiana del plano que pasa por el origen y contiene a la recta $L := \langle x = 1-t, y = -t, z = 2+t \rangle$

Ejercicio 4. Demuestre que la distancia entre un punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ y un plano $ax + by + cz = d$ está dada por la fórmula $D = \dfrac{|d - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Ejercicio 5. Encuentre la ecuación cartesiana del plano determinado por todos los puntos que están a la misma distancia de $\boldsymbol{A} = (4,-4,3)$ y $\boldsymbol{B} = (2,0,1)$.

Ejercicio 6. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, determinando si tienen única solución, infinitas soluciones, o si son inconsistentes.

$$(a)\ \begin{cases} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{cases} \qquad (d)\ \begin{cases} -2x_1 + x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 &= -3 \end{cases}$$

$$(b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{cases} \qquad (e)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$(c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{cases} \qquad (f)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{cases}$$

[1] Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ se dicen *alabeadas* si no son paralelas pero tampoco se intersectan.

Ejercicio 7. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ x - 2z &= 1 \\ 2x + 2y - 3z &= 2 \\ 2x - tz &= 2 \end{aligned}$$

(a) Escríbalo en la forma $Ax = b$ y escriba la matriz aumentada correspondiente al sistema: $[A|b]$

(b) Encuentre un valor (es decir, un número particular) de $\mathbf{t}$ tal que el sistema tenga una infinidad de soluciones. Determine todas las soluciones.

(c) Encuentre un valor (un número particular) de $\mathbf{t}$ tal que el sistema tenga una única solución. Determine la solución.

(d) ¿Existen valores de $\mathbf{t}$ tal que el sistema no tenga solución? Dé razones que justifiquen su respuesta.

Verdadero-Falso

Ejercicio 8. Estudie las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas, explicando claramente su respuesta. En particular, realice una *demostración* o encuentre un *contraejemplo* según sea el caso.

(a) La recta intersección de los planos $x + 4y - 3z = 3$ y $2x - y + 5z = -3$ pasa por el punto $(-1, 1, 0)$.

(b) El sistema homogéneo $\begin{cases} x + y + \alpha z = 0 \\ x + y + \beta z = 0 \\ \alpha x + \beta y + z = 0 \end{cases}$ tiene solución trivial si y solamente si $\alpha = \beta$.

(c) Las rectas $L_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}$ y $L_2 : \begin{cases} x = 17 + 3s \\ y = 4 + s \\ z = -8 - s \end{cases}$ se intersectan en un único punto.

(d) Existen infinitos valores de a, b, c para los que la recta ℓ con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + at \\ y = -2 + bt \\ z = -1 + ct \end{cases}$$

está contenida en el plano que pasa por el punto $(1, -2, -1)$ y cuyo vector normal es $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS	**ÁLGEBRA LINEAL**
Universidad de los Andes	**Semana 4**

Operaciones de matrices

Ejercicio 1. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

En cada caso, determine si la operación indicada puede realizarse. En caso afirmativo, calcule el resultado:

(a) CD $\quad$ (b) $2A - DC$ $\quad$ (c) $B + 2CD$

(d) $(AD)^T + BC$ $\quad$ (e) $A(D - C)$ $\quad$ (f) $AD - 2B^{-1}$

Ejercicio 2. Determine si las siguientes matrices son invertibles o no. En caso de que sean invertibles, diga cuál es su inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3. Encuentre la inversa de las siguientes matrices:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4. Utilice la información del ejercicio anterior para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

(a) $\begin{cases} 3x + y = 9 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ $\quad$ (b) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 2 \\ y + 6z = 0 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$ $\quad$ (c) $\begin{cases} x + 2y + 4z = 8 \\ y + 6z = 4 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$

Ejercicio 5. Demuestre que para toda matriz invertible 2×2 se tiene que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejercicio 6. Si $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre una matriz C tal que $ACA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 7. Demuestre que si A es una matriz invertible $n \times n$, entonces para todo vector columna $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ el sistema de ecuaciones lineales $A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene solución única.

Ejercicio 8. Sean A, B, C, D las mismas matrices del Ejercicio 1.

(a) Determine cuál debería ser el tamaño de una matriz X que satisfaga la ecuación

$$C^T + A \cdot X \cdot B^{-1} = D.$$

(b) Determine una matriz X que sea solución de la ecuación.

Verdadero-Falso

(a) Si A es una matriz cuadrada tal que $A^{n+1} = 0$, entonces

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n.$$

(b) Si C y D son invertibles, entonces $(C^{-1} + D^{-1})^{-1} = C(C + D)^{-1}D$.

(c) Si A y B son matrices cuadradas tales que $AB = \mathbf{0}$, entonces $A = \mathbf{0}$ ó $B = \mathbf{0}$.

(d) Si A es una matriz invertible, entonces $A + A^T$ también es invertible.

(e) Existen infinitos valores reales de α para los cuales la matriz $\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{bmatrix}$ es invertible.

(f) Si A y B son invertibles, entonces $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(g) Si A es una matriz triangular superior e invertible, entonces A^{-1} es triangular inferior.[1]

[1]Una matriz *triangular superior* es una matriz cuadrada que tiene ceros en todas las entradas bajo la diagonal principal. Similarmente, una matriz *triangular inferior* es una matriz cuadrada que tiene ceros en todas las entradas encima de la diagonal principal.

EJERCICIOS PROPUESTOS	**ÁLGEBRA LINEAL**
Universidad de los Andes	**Semana 5**

Ejercicio 1. Calcule los siguientes determinantes:

$(a)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ $\quad (b)\ \begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix}$ $\quad (c)\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad (d)\ \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

$(e)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ $\quad (f)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{vmatrix}$ $\quad (g)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 12 \end{vmatrix}$ $\quad (h)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 2. Sean $a(t)$ y $b(t)$ dos funciones derivables. Muestre que

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a''(t) & b''(t) \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3. Supongamos que A y B son matrices de tamaño 3×3 tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = 5$. Calcule los siguientes determinatnes:

$(a)\ \det(5AB^{-1})$ $\quad (b)\ \det(3A^2B)$ $\quad (c)\ \det(\sqrt{2} \cdot A^{-1} \cdot B)$

Ejercicio 4. Utilice la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

$(a)\ \begin{cases} x + 3y &= 1 \\ 3x - 2y &= 14 \end{cases}$ $\quad (b)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{cases}$ $\quad (c)\ \begin{cases} x + y &= 3 \\ x + z &= 2 \\ y + z + w &= 6 \\ y + w &= 1 \end{cases}$

Ejercicio 5. Encuentre la inversa de las siguientes matrices utilizando la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A) :$$

$(a)\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad (c)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 6. Sea $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular $X^TX, X \cdot X^T$, $\det(X^TX)$ y $\det(X \cdot X^T)$.

Ejercicio 7. Para cada una de las siguientes matrices, determine los valores de λ para los que la matriz $B = A - \lambda \cdot I$ no es invertible.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8. Suponga que sabemos que $\det\left(\begin{bmatrix} a & -2b & c \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}\right) = -1$. Calcule los siguientes determinantes:

$$(a)\ \begin{vmatrix} -3a & 6b & -3c \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} a & -2b & c \\ 1+2a & 3-4b & -1+2c \\ -a & 5+2b & 2-c \end{vmatrix} \qquad (c)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 11 & 0 \\ a+1 & -2b+3 & c-1 \end{vmatrix}$$

1. Espacios Vectoriales y subespacios

Ejercicio 1. Considere el conjunto $\mathbb{R}^2$, con la suma y la multiplicación por escalar definidas de la siguiente manera:

$$\text{Suma: } [x, y] \oplus [a, b] = [x + a + 1, y + b]$$
$$\text{Producto por escalar: } r \odot [x, y] = [r \cdot x + r - 1, r \cdot y]$$

Determine si $V = (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En caso afirmativo, ¿Cuál sería el vector $\mathbf{0_V}$? ¿Cuál sería el opuesto aditivo del vector $[x, y]$ en V?

Ejercicio 2. Considere el subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^2$ dado por $S = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\}$, con la suma y la multiplicación por escalar definidas en forma usual. Determine si $(S, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Determine si el conjunto H de las matrices 3×3 de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$$

forma un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$. En caso afirmativo, ¿cuál es la dimensión de H? ¿Cuál es una base de H?

Ejercicio 4. Determine si el conjunto $H = \{p(x) \in P_3 : p'(2) = 0\}$ es un subespacio vectorial del espacio P_3 de polinomios de grado menor o igual a 3. ¿Cuál es su dimensión? ¿Cuál podría ser una base?

Ejercicio 5. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes en el espacio vectorial dado:

(a) $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x, \cos(2x)\}$ como subconjunto del espacio $\mathcal{F}$ de funciones reales.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ como subconjunto del espacio $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

(c) $\{x, x^2 + 1, (x - 1)^2\}$ como subconjunto del espacio de polinomios $P_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 6. Determine si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$, justificando claramente su respuesta. En caso afirmativo, encuentre una base para el subespacio y determine su dimensión.

(a) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 4y + z = 1\}$.

(b) $H = \text{span}([1, 0, 2], [0, 2, 3], [-1, 2, 1], [-2, 0, 4])$.

(c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z)$es ortogonal al vector $(-3, 5, 1)\}$.

(d) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y^2 + z = 0\}$.

(e) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = y, 2x + 3z - y = 0$ y $4x - 3y + 5z = 0\}$.

(f) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \cdot y \cdot z = 0\}$.

(g) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z)$es un múltiplo escalar de cualquier vector de $\mathbb{R}^3\}$.

Ejercicio 7. Demuestre que si U, W son subestpacios de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2, entonces $\dim(U \cap W) \geq 1$.

Ejercicio 8. Encuentre el espacio columna, espacio fila, espacio nulo, nulidad y rango de las siguientes matrices:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(d)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (e)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Verdadero-Falso

Ejercicio 9. Estudie las siguientes afirmaciones y determine si son verdaderas o falsas, explicando claramente su respuesta. En particular, realice una *demostración* o encuentre un *contraejemplo* según sea el caso.

(a) Todo espacio vectorial tiene al menos dos elementos.

(b) Los vectores de coordenadas $(3, 1, 4), (2, 5, 6)$ y $(1, 4, 8)$ constituyen una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

(c) Los polinomios $f_1(x) = -x^2 - x + 1, f_2(x) = x^2 + 2x$ y $f_3(x) = x^2 - 1$ constituyen una base para el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$.

(d) El polinomio $p(x) = 2x - 1$ pertenece al subespacio generado por los polinomios

$$\{-5x^2 - 2, -6x^2 - 9x + 8, -x^2 - 7x + 9\}.$$

(e) Siempre que a, b, c sean reales distintos, los vectores $\{(1, a, a^2), (1, b, b^2), (1, c, c^2)\}$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

(f) Es posible construir una base para el espacio de las matrices 2×2 conformada por matrices invertibles.

EJERCICIOS PROPUESTOS	**ÁLGEBRA LINEAL**
Universidad de los Andes	**Semanas 9 y 10**

Transformaciones lineales

Ejercicio 1. Determine si las siguientes funciones son transformaciones lineales. En caso afirmativo, encuentre su matriz de representación, núcleo, imagen y rango.

1. La función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T[x, y, z] = [2x - y + z, x + y - 3z, -x - 2z]$
2. La función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T[x, y] = [x + y^2, 2y]$.
3. La función $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T[x, y, z] = [x - y + 2z, -2x + 2y - 4z]$.

Ejercicio 2.

(a) Defina una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, que transforme $(1, 0)$ en $(1, 1, 1)$ y muestre que es una transformación lineal.

(b) Encuentre la matriz de representación de la transformación que usted definió.

(c) Halle la imagen de $(0, 1)$ por la transformación que usted definió.

(d) Halle el núcleo, imagen y el rango de su transformación.

Ejercicio 3. Construír en cada caso una transformación lineal con las condiciones dadas. Determinar núcleo, imagen y matriz estándar de la transformación que construya.

1. De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que no sea uno a uno.
2. De $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuya imagen sea una recta que pasa por el origen.
3. De $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ que no sea sobre.
4. De $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que no sea invertible.

Ejercicio 4. Determinar una expresión general para una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que refleja los vectores del plano con respecto a la recta $y = -x$. Construír la matriz estándar de la transformación y de su inversa.

Ejercicio 5. En los siguientes casos encuentre la matriz de proyección y la proyección del vector $\boldsymbol{v}$ sobre el espacio W:

(a) $\boldsymbol{v} = [2, -1, 3]$, $W = \text{span}([2, 1, 1], [-1, 2, 1])$ en $\mathbb{R}^3$.

(b) $\boldsymbol{v} = [4, 2, -1]$ y W es el plano $3x + 2y + z = 0$ en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Construír las siguientes funciones:

1. Una transformación lineal de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuyo núcleo sea el subespacio de las matrices diagonales.

2. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que sea uno a uno. Hallar núcleo e imagen.

3. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^2$ que sea sobre. Hallar núcleo e imagen.

4. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que no sea biyectiva.

5. Una transformación lineal de $\mathbb{P}_3$ en $\mathbb{P}_3$ cuya imagen sea el subespacio $\operatorname{span}(1, 1+x)$.

Ejercicio 7. Considere la función $J : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $J(p(x)) = \displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$

1. Demostrar que J es una transformación lineal.

2. Determinar núcleo e imagen de J.

3. Determinar la matriz estándar de J.

Ejercicio 8. Sea $T : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica de $\mathbb{P}_3$. Se sabe además que $T(1) = (0,0,0), T(x) = (1,1,-1), T(x^2) = (-1,0,1), T(x^3) = (1,1,0)$.

1. Hallar $T(5 - x + 3x^2 - 2x^3)$.

2. Determinar $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)$ para cualquier polinomio de $\mathbb{P}_3$.

3. Hallar el núcleo y la imagen de la transformación.

Ejercicio 9. Considere el espacio vectorial $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que f' existe y es continua.

1. Muestre que $W = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : f' \equiv 0\}$ es un subespacio de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. ¿Cuál es la dimensión de W?

2. Determine si $T : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, definida por $T(f(x)) = xf'(x) + f(x)$, es una transformación lineal.

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$, con $a_{11}, a_{22}, a_{33} \neq 0$.

1. Considere la transformación lineal S de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $S(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$. Demuestre que S es inyectiva y sobreyectiva.

2. Describa la transformación inversa S^{-1}, que va de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ y cumple que $S^{-1}(S(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ para todo vector $\boldsymbol{x}$ en $\mathbb{R}^3$.

3. Si A fuera una matriz triangular superior arbitraria, ¿seguiría siendo cierto que S es uno a uno y sobre?

Para los ejercicios 12 y 13 se usará la siguiente definición:

Definición: Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}'$ una base de $\mathbb{R}^m$. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, se define la *matriz de representación de* T *con respecto a las bases* $\mathcal{B}$ *y* $\mathcal{B}'$ como la matriz $R_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = C_{E\mathcal{B}'} \cdot A_T \cdot C_{\mathcal{B}E}$, donde E es la base canónica.

Ejercicio 11. Demuestre que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y $\boldsymbol{x}$ es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$, entonces $R_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}([\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}) = [T(\boldsymbol{x})]_{\mathcal{B}'}$.

(Es decir, al multiplicar $R_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ por las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$ en la base $\mathcal{B}$, se obtienen las coordenadas del vector $\boldsymbol{x}$ en la base $\mathcal{B}'$.)

Ejercicio 12. Encuentre la matriz de representación de las siguientes transformaciones con respecto a las bases dadas:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T([x, y, z]) = [x+y, y-3z]$, con $\mathcal{B} = \{[1, 1, 1], [1, 1, 0], [1, -1, 0]\}$ y $\mathcal{B}' = \{[1, 2], [2, -1]\}$.

(b) $P_W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde P_W representa la proyección sobre el plano $W : x-2y+z = 0$, con $\mathcal{B} = \{[1, 2, -1], [-1, -1, 0], [0, 1, 1]\}$ y $\mathcal{B}' = \{[1, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 1]\}$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T[a, b] = (a+2b)+(b-a)x+bx^2$, con $\mathcal{B} = E = \{[1, 0], [0, 1]\}$ y $\mathcal{B}' = \{x^2, x, 1\}$.

Ejercicio 13. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si $H_1 \subseteq H_2$ entonces $H_2^{\perp} \subseteq H_1^{\perp}$

Verdadero-Falso

Ejercicio 14. Estudiar las siguientes afirmaciones, determinar si son verdaderas o falsas. *Demostrar* o ilustrar completamente con el desarrollo o con un *contraejemplo*, según sea el caso.

(a) La función $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x + 4y \\ 2x + y \end{bmatrix}$ es una transformación lineal uno a uno.

(b) La función $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $S\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - 2b + c \\ 5a - b + 3c \\ 4a + b + 2c \end{bmatrix}$ es lineal, con núcleo de dimensión uno e imagen de dimensión 2.

(c) En $\mathbb{R}^3$ la reflexión respecto al plano yz es una transformación lineal uno a uno.

(d) La transformación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (y, -x)$ refleja un vector primero con respecto a la recta $y = x$ y con respecto al eje x.

(e) Sea B una matriz fija de tamaño 2×2 y se define la función $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ por $T(A) = BA$. Entonces T es lineal y uno a uno.

(f) Si $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal no nula entonces la imagen de S es una recta que pasa por el origen ó un plano que pasa por el origen ó todo $\mathbb{R}^3$.

(g) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = \{[x, y, z] : 2x - y + z = 0\}$.

(h) Sea $B = \{[1, -1], [1, 1]\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz $R_{B,B}$ es $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(i) La función $R : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ definida por $R\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ es lineal y biyectiva (es decir, lineal, inyectiva y sobreyectiva).

(j) No existe una transformación lineal de $\mathcal{P}_4$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}$ que sea inyectiva.

(k) Si Q es una matriz ortogonal de tamaño $n \times n$ y $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ entonces el ángulo entre $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ es el mismo que el ángulo entre $Q \cdot \boldsymbol{v}$ y $Q \cdot \boldsymbol{w}$.

Complemento ortogonal, bases ortonormales, matrices ortogonales y proceso de Gramm-Schmidt

Ejercicio 1. En cada uno de los siguientes casos encuentre:

(1) Una base ortonormal para W.
(2) El subespacio $W^{\perp}$ de $\mathbb{R}^n$.
(3) La proyección $\text{proy}_W(\boldsymbol{v})$
(4) La descomposición $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{h}$ donde $\boldsymbol{p} \in W$ y $\boldsymbol{h} \in W^{\perp}$.

(a) $W = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$, $\boldsymbol{v} = [-1, 2]$.

(b) $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0\}$, $\boldsymbol{v} = [-3, 1, 4]$.

(c) $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\}$, $\boldsymbol{v} = [1, 1, 1]$.

(d) $W = \{[x, y, z, w] \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + 3z - 2 = 0\}$, $\boldsymbol{v} = [1, -1, 2, 3]$.

Ejercicio 2.

(a) Sean $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}$ dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $||\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}|| = \sqrt{2}$.

(b) Si los vectores $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ son ortonormales, demuestre que

$$||\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \cdots + \boldsymbol{u_n}||^2 = ||\boldsymbol{u_1}||^2 + ||\boldsymbol{u_2}||^2 + \cdots + ||\boldsymbol{u_n}||^2 = n.$$

Ejercicio 3. Añada una columa $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ para que $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & c \end{bmatrix}$ sea una matriz ortogonal.

Ejercicio 4. Determine los valores de b y c que hacen que la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ b & c & 0 \\ c & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{sea ortogonal.}$$

Ejercicio 5. Encuentre una base ortogonal para el subespacio $W = \text{span}([1, 1, 0], [-1, 2, 1])$ de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 6. Encuentre una base ortonormal para el subespacio

$$W = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] : x_1 = x_2 + 2x_3, x_4 = -x_2 + x_3\}$$

(a) Determine el complemento ortogonal para W, $(W^{\perp})$.

(b) Calcule la proyección del vector $[1, 0, 0]$ sobre el espacio W usando el proceso con las matrices.

(c) Escriba el vector $\bar{b} = [1, 0, 0]$ en la forma $\bar{b} = \bar{b}_W + \bar{b}_{W^{\perp}}$.

(d) Determine una base ortogonal para el subespacio W.

(e) Calcule la proyección del vector $[1, 0, 0]$ sobre el espacio W usando la base ortogonal hallada en (d).

(f) Normalice los vectores de la base hallada en (d) (es decir, calcule una base **ortonormal** para W)

(g) Halle una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ que contenga la base encontrada en (f).

Ejercicio 7. Considere los siguientes vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$:

$$\boldsymbol{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{w_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Aplique el proceso de ortonormalización de Gramm-Schmidt a $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}$ para obtener $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}$ ortonormales. (Conserve el orden de los vectores).

Ejercicio 8. Considere el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ dado por $W = gen\langle [1, 0, 1], [1, 0, -1] \rangle$

(a) Encuentre P_W, la matriz de proyección sobre W. Escriva $P_W \boldsymbol{v}$ para $v \in \mathbb{R}^3$.

(b) Encuentre $ker(P)$. (Note que $ker(P) = W^{\perp}$

(c) Si $\boldsymbol{v} \in W$, ÀQué es $P_{W^{\perp}} \boldsymbol{v}$? Justifique su respuesta.

Ejercicio 9. Demuestre que si Q_1, Q_2 son matrices ortogonales, entonces $Q_1^T Q_2$ también es ortogonal.

Ejercicio 10. Verifique que las siguientes matrices son ortogonales, y calcule su inversa.

$$(a)\ \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aproximación por mínimos cuadrados

Ejercicio 11. Determine el mejor ajuste lineal y cuadrático para los siguientes conjuntos de datos. Realice también la gráfica correspondiente. (Puede usar computador para los cálculos y las gráficas)

(a) $X = \{(-2, 0), (-1, -1), (0, 1), (1, 0), (2, -2), (4, 3)\}$

(b) $Y = \{(0, 1), (-1, 6), (1, 0), (2, 3)\}$

EJERCICIOS PROPUESTOS	**ÁLGEBRA LINEAL**
Universidad de los Andes	**Semana 13**

Valores, vectores propios y diagonalización

Ejercicio 1. Calcule los vectores y valores propios de cada una de las siguientes matrices, determinando también las multiplicidades algebraicas y geométricas de sus valores propios:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. Determine si las siguientes matrices son diagonalizables o no. Justifique claramente su respuesta.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad (d)\ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(e)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (f)\ \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix} \qquad (g)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (h)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(i)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad (j)\ \begin{bmatrix} -4 & 6 & -12 \\ 3 & -1 & 6 \\ 3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \qquad (k)\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (l)\ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(m)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad (n)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad (o)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad (p)\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(q)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (r)\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad (s)\ \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \qquad (t)\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Compruebe que los únicos valores propios de la matriz A son 2 y 4.

(b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C que diagonalicen a la matriz A, es decir, tales que $A = CDC^{-1}$.

(c) Calcule $A^8 \cdot \boldsymbol{v}$ donde $\boldsymbol{v} = [0, 0, 1]$.

Ejercicio 4. Determine los valores de b para los cuales las siguientes matrices son diagonalizables:

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & b & -11 \\ 1 & -11 & 3 \end{bmatrix} \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 1 & b & 2b \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5. Encuentre una expresión para la matriz A^n para cada entero positivo n, donde la matriz A está dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 6. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule A^{10} y B^{20}.

Ejercicio 7. Considere la transformación $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que representa una rotación de π radianes con respecto al eje z. Encuentre los valores propios y los espacios propios de S.

Ejercicio 8. Dada una matriz cuadrada A, se define la *traza de* A ($\operatorname{tr}(A)$) como la suma de los elementos que están en la diagonal de A. Muestre que si A es una matriz de tamaño 2 la ecuación característica de A se puede expresar como $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$.

Ejercicio 9. Sea $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \mid \ f' \text{ es continua}\}$ y sea $T : C(\mathbb{R}) \longrightarrow C(\mathbb{R})$, definida por $T(f(x)) = xf'(x) + f(x)$. Calcular los valores y vectores propios de T.

Ejercicio 10. Sean $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ vectores propios de una transformación lineal $T : V \longrightarrow V$ con valores propios correspondientes λ_1 y λ_2 respectivamente. Probar que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son vectores linealmente independientes.

Verdadero-Falso

Ejercicio 11.

(b) Una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si sus vectores son ortogonales.

(c) Si A y C son matrices cuadradas, C es invertible y $\boldsymbol{v}$ es un vector propio de A, entonces $C^{-1}\boldsymbol{v}$ es un vector propio de la matriz $C^{-1}AC$.

(d) Si las filas de la matriz A de tamaño $n \times n$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ entonces A es una matriz ortogonal.

(e) La transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que refleja el plano con respecto a la recta $y = x$ tiene valores propios $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$.

(f) El valor $\lambda = 0$ es un valor propio de A si y sólo si A no es invertible.

(g) Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ y $a + b = c + d$ entonces la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tiene valores propios enteros.

(h) Si A es una matriz de tamaño $n \times n$, entonces A y A^T tienen los mismos valores propios.

(i) Todo vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ pertenece a una base ortogonal de $\mathbb{R}^n$.

(j) Todo vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ pertenece a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

(l) Si la proyección del vector $\boldsymbol{v}$ sobre el subespacio W es el mismo vector $\boldsymbol{v}$, entonces $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a W.

(m) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal con menos de n valores propios entonces T no es diagonalizable.

(n) Si A y B son matrices cuadradas semejantes, entonces A y B tienen los mismos valores propios.

(o) Si A es una matriz diagonalizable entonces A es invertible.

Diagonalización ortogonal y aplicaciones

Ejercicio 1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Compruebe que los únicos valores propios de la matriz A son 2 y 4.

(b) Encontrar la matriz diagonal D y una matriz C invertible que diagonalice a la matriz A, es decir, que $A = CDC^{-1}$.

(c) Encuentre una matriz Q ortogonal tal que $A = QDQ^T$

(d) Calcule $A^8\boldsymbol{v}$ donde $\boldsymbol{v} = [0, 0, 1]$

Ejercicio 2. Determine si las siguientes matrices son ortogonalmente diagonalizables, y en caso afirmativo encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tal que $A = QDQ^T$.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3. Demuestre que si una matriz real A de tamaño 2×2 tiene dos vectores propios $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ que son ortogonales, entonces A es simétrica.

Ejercicio 4. Demuestre que si A es diagonalizable entonces el determinante de A es igual al producto de sus valores propios: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Ejercicio 5. Demuestre que los valores propios de una matriz simétrica real son todos números reales.

Formas cuadráticas y secciones cónicas

Ejercicio 6. Para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas, determine qué tipo de cónica es (círculo, elipse, hipérbola, cónica degenerada) y realice la gráfica correspondiente.

(a) $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 8$ (b) $4x^2 + 4xy + y^2 = 9$ (c) $2\sqrt{3}xy - 2y^2 = 1$ (d) $2x^2 + xy + y^2 = 2$

Ejercicio 7. Considere la ecuación dada por $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 16x - 32y + 52 = 0$.

(a) Complete cuadrados para las variables x, y, para obtener una ecuación de la forma $F(x - h, y - k) = d$ donde (h, k) es un punto de $\mathbb{R}^2$.

(b) Realice la gráfica de la ecuación.

Ejercicio 8. Demuestre el **Teorema de los ejes principales**: *Toda forma cuadrática $F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, \ldots, x_n)$ en n variables $x_1, \ldots, x_n$ puede ser diagonalizada por una sustitución $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{t}$ donde $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ y Q es una matriz ortogonal $n \times n$. Más aún, luego del cambio de variables la forma cuadrática $F(\boldsymbol{x})$ es equivalente a su* forma diagonalizada

$$\lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son valores propios de la matriz simétrica de coeficientes de $F(\boldsymbol{x})$.

Ejercicio 9. Encuentre la forma diagonalizada de cada una de las siguientes formas cuadráticas

(a) $F(x, y, z) = 2xy + 2xz$ $\qquad$ (b) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_4^2$

Definición: Decimos que una forma cuadrática $F(\boldsymbol{x}) = F(x_1, \ldots, x_n)$ es *positiva definida* si $F(\boldsymbol{x}) > 0$ siempre que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \neq 0$. Además, decimos que $F(\boldsymbol{x})$ es *positiva semidefinida* si para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $F(\boldsymbol{x}) \geq 0$.

Ejercicio 10.

(a) Demuestre que una forma cuadrática $F(\boldsymbol{x})$ es positiva definida si y sólo si todos los valores propios de la matriz simétrica A asociada a F son positivos.

(b) Demuestre que una forma cuadrática $F(\boldsymbol{x})$ es positiva semidefinida si y sólo si todos los valores propios de la matriz simétrica A asociada a F son no-negativos.

Sistemas dinámicos

Ejercicio 11. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule A^{20}.

Ejercicio 12. El comportamiento de las ganancias por inversiones en tres empresas está descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= -x_3 \\ x_3' &= -x_2 \end{aligned}$$

donde x_1, x_2, x_3 son las ganancias en determinado tiempo t (medido en días), y x_1', x_2', x_3' son las ganancias en el tiempo $t + 1$. Suponga que las ganancias el martes 5 de Noviembre fueron de 600, -10, 50 miles de USD, respectivamente.

(a) Determine las ganancias 20 días después.

(b) ¿Sería más conveniente retirarse después del día 20 o después del día 21? Justifique su respuesta.

Ejercicio 13. Determine una fórmula para las siguientes sucesiones definidas recursivamente:

$$(a)\ \begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 2; \\ F_{n+3} = F_{n+2} + 3F_{n+1} - 3F_n \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} H_0 = -1; H_1 = 0 \\ H_{n+2} = 3H_n + 2H_{n+1} \end{cases}$$

Un *sistema dinámico* está dado por un espacio vectorial V y una transformación $T : V \longrightarrow V$. La idea es que a cada vector $\boldsymbol{v_0} \in V$ le corresponde una sucesión definida recursivamente como $\boldsymbol{v_{n+1}} = T(\boldsymbol{v_n})$. Más aún, decimos que el sistema dinámico (V, T) es:

- *Asintóticamente estable:* si para todo vector inicial $\boldsymbol{v_0} \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{n\to\infty} ||T^n(\boldsymbol{v_0})|| = 0$.
- *Estable:* si para todo vector inicial $\boldsymbol{v_0}$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \geq 0$, $||T^n(\boldsymbol{v_0})|| \leq \alpha$.
- *Inestable:* si existe un vector inicial $\boldsymbol{v_0}$ tal que $\{||T^n(\boldsymbol{v_0})||\}$ no está acotado.

Ejercicio 14. Suponga que $V = \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación *lineal*, con matriz asociada A diagonalizable.

(a) Demuestre que T es asintóticamente estable si y sólo si para todo valor propio λ de A, $|\lambda| < 1$.

(b) Demuestre que T es estable si y sólo si $|\lambda| \leq 1$ para todo valor propio λ de A.

(c) Demuestre que T es inestable si y sólo si A tiene un valor propio λ con $|\lambda| > 1$.

(d) Dé ejemplos de transformaciones T_1, T_2, T_3 del plano tales que T_1 sea asintóticamente estable, T_2 sea estable pero no asintóticamente estable, y T_3 sea inestable.