

Álgebra Lineal, Parcial 2

martes 21 de octubre de 2025

Instrucciones: Este examen es de 80 minutos. No se permite utilizar notas ni calculadoras ni ningún otro tipo de ayuda. Por favor escriba su nombre en este tema y también en su hoja de examen. *Justifique sus respuestas.*

- (a) (7 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Halle una matriz C tal que $\det(AC^{-1}) = 2$.

(b) (6 puntos) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\det(B)$ y determine para cuáles valores de t se cumple que A es invertible.
- Dé un ejemplo de cada uno de los siguientes. *En este ejercicio no es necesario justificar sus respuestas.*

 - (3 puntos) Una matriz de 3×3 cuyas entradas son todos números positivos y cuyo determinante es 0.
 - (3 puntos) Una matriz elemental de 3×3 cuya determinante es 4.
 - (3 puntos) Tres vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en \mathbb{R}^3 tal que los conjuntos $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ y $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente independientes, pero el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente.
 - (3 puntos) Un subespacio Y de las matrices de 2×2 tal que la dimensión de Y es 3.
- Sea \mathcal{D} el espacio vectorial de funciones derivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathcal{D} son *subespacios* de \mathcal{D} ? En el caso que sí, verifique las tres condiciones necesarias. En el caso que no, indique una de las tres condiciones que no se cumple.

 - (4 puntos) $W_1 = \{ae^x + b \cos(x) : a, b \in \mathbb{R}\}$
 - (4 puntos) $W_2 = \{f \in \mathcal{D} : f'(0) \leq 0\}$
 - (4 puntos) $W_3 = \{f \in \mathcal{D} : f(2) \neq f(3)\}$
- Sean $f_1 = 1 - x - x^2$, $f_2 = x + x^2 - x^3$ en el espacio P_3 de polinomios de grado a lo sumo tres. Sea W el subespacio de P_3 generado por f_1 y f_2 .

 - (3 puntos) Cuál es la dimensión de W ?
 - (5 puntos) Determine si el polinomio $1 + x + x^2 + x^3$ pertenece a W o no.
 - (5 puntos) Halle una base de P_3 que contiene f_1 y f_2 .