MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL 1 - PARCIAL 2

NOMBRE: ______________________ **CÓDIGO:** ______________________

> Este es un examen individual, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.

Ejercicio 1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (escriba explícitamente "verdadero" o "falso"). Justifique su respuesta.

(i) (0.4 pts) El conjunto $H = \{f \in P_{\leqslant 3} : f(0) + f'(0) = 0\}$ donde f' es la derivada de f, es un subespacio de $P_{\leqslant 2}$.

(ii) El conjunto $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Existen 5 matrices de 2×2 que generan al subespacio H de todas las matrices triangulares superiores de 2×2.

(iv) (0.4 pts) Los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \right\}$$

son linealmente independientes.

(v) El espacio generado por los vectores $(1, 0, 1)$, $(-1, 0, 2)$ y $(1, 0, -1)$ es todo $\mathbb{R}^3$.

(vi) Sea A una matriz de 1000×1000. Si $\det(A) = 3$, entonces $\dim(\ker(A)) = 3$.

Ejercicio 2. Considere el siguiente subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

(**NO** tiene que mostrar que es un subespacio. Si lo demuestra se le bajarán puntos)

(1) Encuentre una matriz A tal que $S = \ker(A)$.

(2) Encuentre una base de S.

(3) Encuentre $\dim(S)$.

Ejercicio 3. Considere las siguientes dos bases de $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) (0.6 pts) Halle la matriz M de cambio de base $A_{B \to B'}$.

(ii) (0.3 pts) Calcule $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_B$

(iii) (0.3 pts) Use los puntos (i) y (ii) para encontrar $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_{B'}$

Ejercicio extra. (0.2 pts) Demuestre que si u, v son dos vectores linealmente indepndientes arbitrarios de $\mathbb{R}^3$, entonces existe un vector w de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Hoja auxiliar de cálculos