

Parcial 2

Álgebra Lineal I

MATE-1105

Universidad de los Andes

8 de julio de 2025

Este es un examen individual, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular.
 Toda respuesta debe estar justificada matemáticamente! Respuestas sin justificación no tienen validez.
 La nota se calcula sobre 50 puntos, quiere decir, hay un bono de 3 puntos.
 Tiempo máximo del examen es 80 minutos.

Nombre:

Código:

1. Sea P_2 el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 2. Considere la transformación

$$T : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(2) - p(-2) \\ p'(1) - p'(-1) \\ p'(2) \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal.

- (a) Encuentre una base para el kernel $\ker T$ y su dimensión. (5 pts)
 (b) Encuentre una base para la imagen $\text{Im } T$ y su dimensión. (5 pts)
 (c) Encuentre un vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ en la imagen de T tal que $b_3 = 2$. (3 pts)

2. Sea $\vec{a} \in \mathbb{R}^5$ un vector fijo.

- (a) Diga si $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 0\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^5 . (5 pts)
 (b) Diga si $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = 1\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^5 . (4 pts)

3. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -5 \\ -4 & -8 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -10 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix}$.

- (a) Muestre que \vec{u} es una solución del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$. (4 pts)
 (b) Sean $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$ las columnas de la matriz A .

(i) Diga si \vec{b} pertenece al espacio columna de A (espacio generado por $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$). (3 pts)

(ii) Escriba el vector \vec{b} como una combinación lineal de los vectores $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$. (3 pts)

(c) Encuentre una base para espacio columna de A . (5 pts)

4. Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

(a) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a-2 & b-4 & c-6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Diga si se puede concluir que $\det A = \det B$. (5 pts)

(b) Sea $C \in M(3 \times 3)$ una matriz antisimétrica del tamaño 3×3 . Diga si A es invertible o no. (3 pts)

(c) Diga si la siguiente función es una transformación lineal. (4 pts)

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ z + 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Sean $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $W = \text{gen}(S)$. Encuentre una matriz $A \in M(2 \times 2)$ tal que $A \notin W$. (4 pts)