PARCIAL 2 **ÁLGEBRA LINEAL**
Universidad de los Andes **10 de abril de 2025**

Nombre: ________________________________ **Código:** ____________________

Duración: 80 minutos

La siguiente información puede ser útil:

$$\text{La matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ se reduce a la matriz } H = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 1. [16 pts, 4 c/u]

(a) Encuentre una base para el espacio nulo de la matriz A.

(b) Determine el rango y la nulidad de la matriz A.

(c) Determine una base para el subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ definido por

$$H = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \right).$$

(d) Escriba el polinomio $3x^3 + 2x^2 + 8x + 6$ como combinación lineal de los polinomios $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$ y $r(x) = x + 1$.

Ejercicio 2. [10 pts, 5 c/u] Considere el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por $W = \operatorname{span}([2,1,1],[-1,2,1])$ en $\mathbb{R}^3$.

(a) Determine la proyección del vector $\boldsymbol{v} = (0,1,3)$ sobre W.

(b) Encuentre la matriz de proyección sobre el espacio W, P_W.

Ejercicio 3. [12 pts, 4 c/u] Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x - 3y + z \\ x - 3y + 2z \\ 2x - 6y + 2z \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre el núcleo (kernel) de T, y la imagen de T.

(b) ¿La transformación T es inyectiva? ¿La transformación es sobreyectiva? Justifique su respuesta.

(c) Determine el complemento ortogonal del espacio $W = \mathrm{Im}(T)$ (la imagen de T).

Ejercicio 4. [12 pts] (VERDADERO-FALSO)

(a) **[8 pts, 2 pts c/u]** Diga si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.

   (i) El conjunto $H = \{(x, y) : y \geq -x\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   (ii) Existe una transformación lineal $T : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ que es inyectiva.

   (iii) Si H_1, H_2 son dos subespacios de $\mathbb{R}^n$ y $H_1 \subseteq H_2$ y $H_2^\perp \subseteq H_1^\perp$.

   (iv) Si $T : \mathbb{R}^7 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ es una transformación lineal y $\mathrm{Im}(T)$ es el espacio de las matrices diagonales, entonces $\dim(\ker(T)) = 4$.

(b) **[2 pts c/u]** Justifique claramente **dos** de sus decisiones en la parte (a).