

Nombre: _____ Código: _____

Duración: 80 minutos

La siguiente información puede ser útil:

$$\text{La matriz } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ se reduce a la matriz } H = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 1. [16 pts, 4 c/u]

- (a) Encuentre una base para el espacio nulo de la matriz A .
- (b) Determine el rango y la nulidad de la matriz A .
- (c) Determine una base para el subespacio de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ definido por

$$S = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \right).$$

- (d) Escriba el polinomio $3x^3 + 2x^2 + 8x + 6$ como combinación lineal de los polinomios $p(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$ y $r(x) = x + 1$.

Solución 1. (a) El espacio nulo de la matriz A son las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Utilizando la matriz reducida H con variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tenemos:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_5 = 0 \\ x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 - 4x_5 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_5 \\ x_4 = -2x_5 \\ x_5 = x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - 4x_5 \\ x_2 \\ x_5 \\ -2x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma, la base para el espacio nulo de A es $\mathcal{B} = \{(3, 1, 0, 0, 0), (-4, 0, 1, -2, 1)\}$.

(b) Por el ejercicio (a) sabemos que la nulidad de A es igual a 2 (la dimensión del espacio nulo de A). Además, como la matriz tiene 5 columnas, el rango de A es igual a $3 = 5 - 2$.

(c) Para entender este subespacio de matrices, recordamos la coordinatización de $\mathcal{M}_{2 \times 2} \approx \mathbb{R}^4$. Al escribir las matrices generadores del espacio S como vectores columna se obtiene precisamente la matriz A , por lo que una base para el espacio S está dado

por las matrices que corresponden a las columnas de A que tienen pivote en la reducción H . Estas columnas son la primera, la tercera y la cuarta, por lo que una base para S sería

$$\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(d) La coordinatización del polinomio $3x^3 + x^2 + 2x + 1$ sería $(3, 1, 2, 1)$, que es la última columna de la matriz A . También, las coordinatizaciones de los polinomios $p(x), q(x), r(x)$ son justamente la primera, tercera y cuarta columna de A . Utilizando los resultados de la última columna en la matriz reducida tenemos que $C_5 = 4C_1 - C_3 + 2C_4$, por lo que tenemos que

$$3x^3 + 2x^2 + 8x + 6 = 4 \cdot p(x) - q(x) + r(x).$$

Ejercicio 2. [10 pts, 5 c/u] Considere el subespacio de \mathbb{R}^3 dado por $W = \text{span}([2, 1, 1], [-1, 2, 1])$ en \mathbb{R}^3 .

- (a) Determine la proyección del vector $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$ sobre W .
- (b) Encuentre la matriz de proyección sobre el espacio W , P_W .

Solución 2. Dado que W es un subespacio de \mathbb{R}^3 de dimensión 2, W es un plano y para encontrar las proyecciones sobre W es necesario primero calcular el complemento ortogonal W^\perp .

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 0 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{5}z = 0 \\ y + \frac{3}{5}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5}z \\ y = -\frac{3}{5}z \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De esta forma, $W^\perp = \text{span}(-1/5, -3/5, 1) = \text{span}(-1, -3, 5)$, y la proyección de \mathbf{v} sobre el espacio W es:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} - \text{proy}_{W^\perp}(\mathbf{v}) = (0, 1, 3) - \frac{(0, 1, 3) \bullet (-1, -3, 5)}{(-1, -3, 5) \bullet (-1, -3, 5)}(-1, -3, 5) \\ &= (0, 1, 3) - \frac{-3 + 15}{1 + 9 + 25}(-1, -3, 5) = (0, 1, 3) - \frac{12}{35}(-1, -3, 5) \\ &= (0, 1, 3) + \left(\frac{12}{35}, \frac{36}{35}, -\frac{12}{7} \right) = \left(\frac{12}{35}, \frac{71}{35}, \frac{9}{7} \right) \end{aligned}$$

(b) Una forma de calcular matriz de proyección P_W es proyectar un vector general (x, y, z) sobre W , y escribirlo como una matriz por el vector columna $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 \text{proy}_W(x, y, z) &= (x, y, z) - \text{proy}_{W^\perp}(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{(x, y, z) \bullet (-1, -3, 5)}{(-1, -3, 5) \bullet (-1, -3, 5)}(-1, -3, 5) \\
 &= (x, y, z) - \frac{-x - 3y + 5z}{35}(-1, -3, 5) \\
 &= (x, y, z) + \left(\frac{-x - 3y + 5z}{35}, \frac{-3x - 9y + 15z}{35}, \frac{5x + 15y - 25z}{35} \right) \\
 &= \left(\frac{34}{35}x - \frac{3}{35}y + \frac{5}{35}z, \frac{-3}{35}x + \frac{26}{35}y + \frac{15}{35}z, \frac{5}{35}x + \frac{15}{35}y + \frac{10}{35}z \right) \\
 &= \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 34 & -3 & 5 \\ -3 & 26 & 15 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De esta forma, la matriz de proyección es $P_W = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 34 & -3 & 5 \\ -3 & 26 & 15 \\ 5 & 15 & 10 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3. [12 pts, 4 c/u] Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x - 3y + z \\ x - 3y + 2z \\ 2x - 6y + 2z \end{bmatrix}.$$

- (a) Encuentre el núcleo (kernel) de T , y la imagen de T .
- (b) ¿La transformación T es inyectiva? ¿La transformación es sobreyectiva? Justifique su respuesta.
- (c) Determine el complemento ortogonal del espacio $W = \text{Im}(T)$ (la imagen de T).

Solución 3. (a) Notemos que la matriz de representación de T está dada por la matriz,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{bmatrix},$$

que corresponde a las primeras 3 columnas y filas de la matriz A , y cuya forma reducida sería igual a las primeras 3 columnas y filas de la matriz H ,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con esto, podemos decir que $\text{Imagen}(T) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$ (columnas de la matriz B con pivote en la reducción). Para calcular el kernel, revisamos las ecuaciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ker(T) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(b) La transformación **no** es inyectiva porque $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$, y tampoco es sobreyectiva porque $\text{rango}(T) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

(c) Para encontrar el complemento ortogonal del espacio $W = \text{Im}(T)$, resolvemos el sistema homogéneo dado por

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De esta forma, $W^\perp = \text{span}(-2, 0, 1)$.

Ejercicio 4. [12 pts] (VERDADERO-FALSO) Diga si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso

Solución 4.

(i) El conjunto $H = \{(x, y) : y \geq -x\}$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^2 .

FALSO. Por ejemplo, el vector $\mathbf{v} = (1, 1)$ está en H porque $1 \geq -1$, pero si multiplicamos por el escalar $\alpha = -1$ tendríamos $\alpha \cdot \mathbf{v} = (-1, -1)$, que no pertenece a H porque $y = -1 \not\geq -x = -(-1) = 1$.

(ii) Existe una transformación lineal $T : \mathcal{P}_4 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ que es inyectiva.

FALSO. Por la coordinatización, $\mathcal{P}_4 \approx \mathbb{R}^5$ y $\mathcal{M}_{2 \times 2} \approx \mathbb{R}^4$. Así, cualquier transformación lineal $T : \mathcal{P}_4 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ satisface que $\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = 5$, y como $\text{rango}(T) \leq \dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}) = 4$, necesariamente tendremos que $\text{nulidad}(T) \geq 1$, lo que hace que T no sea inyectiva.

(iii) Si H_1, H_2 son dos subespacios de \mathbb{R}^n y $H_1 \subseteq H_2$ entonces $H_2^\perp \subseteq H_1^\perp$.

VERDADERO. Si \mathbf{v} es un vector en H_2^\perp , entonces \mathbf{v} es ortogonal a cualquier vector \mathbf{w} en H_2 . Como H_1 es un subespacio de H_2 , \mathbf{v} sería ortogonal a todos los vectores de H_1 , con lo que podríamos concluir que $\mathbf{v} \in H_1^\perp$. Así, como cualquier vector de H_2^\perp también es un vector de H_1^\perp , concluimos que $H_2^\perp \subseteq H_1^\perp$.

(iv) Si $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ es una transformación lineal y $\text{Im}(T)$ es el espacio de las matrices diagonales, entonces $\dim(\ker(T)) = 4$.

FALSO. El subespacio de las matrices diagonales de tamaño 2×2 tiene dimensión 2, porque

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así, si $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ es una transformación lineal y $\text{Im}(T)$ es el espacio de las matrices diagonales, entonces $\text{rango}(T) = 2$, y necesariamente tenemos que

$$\dim(\ker(T)) = \text{nulidad}(T) = 7 - \text{rango}(T) = 7 - 2 = 5 \neq 4.$$