A

MATE-1105: Álgebra lineal

Segundo Examen Parcial 202510, Supletorio 28 de mayo de 2025

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ___________

1	2	3	4	5	6	Σ
						/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cúal es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 03:30-4:50 (80 min).

¡Las matemáticas son la gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía!

13 pts. **Problema 1.** Sea $T : P_3[x] \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T(ax^3+bx^2+cx+d) = \begin{pmatrix} a+2b+3c-d \\ 2a-b+c+3d \\ 3a+b+4c+2d \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que T es lineal.

(b) Calcule $\ker T$, $n(T)$ y $R(T)$.

(c) Encuentre una base para $\operatorname{Im} T$.

8 pts. **Problema 2.** Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta

(a) Sea V un espacio vectorial y $v_1, v_2, v_3 \in V$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Entonces v_1 es combinación lineal de v_2 y v_3.

(b) Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$ tal que u, v no son paralelos. Entonces el conjunto $u, v, u \times v$ es una base de $\mathbb{R}^3$

(c) Existen cuatro matrices simétricas linealmente independientes en $M(2 \times 2)$.

(d) Sean $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$T(\vec{x}) = a, \quad T(\vec{y}) = b.$$

Entonces $n(T) > 0$.

8 pts. **Problema 3.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 16 \end{pmatrix}$ y considere $W = \{X \in M(3 \times 2) : AX = \mathbb{O}_{2\times 2}\}$

(a) Muestre que W es subespacio de $M(3 \times 2)$.

(b) Encuentre una base para W y su dimensión.

12 pts. **Problema 4.** En $M(2 \times 2)$ considere $U = \operatorname{span}\{A, B, C, D\}$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Son A, B, C, D linealmente independientes?. Si no es el caso exhiba una combinación lineal no trivial de A, B, C, D cuyo resultado sea la matriz cero.

(b) Encuentre una base para U y su dimensión.

(c) Complete la base anterior a una base de todo $M(2 \times 2)$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **Problema 5.** De $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ se sabe que $\det A = -5$. Calcular el determinante de

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & y \\ -2 & -2 & x \\ -2 & 5 & z \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{5 pts.}}$ **Problema 6.** Determine si W es subespacio del espacio V dado:

(a) $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V : xy = 0 \right\}$

(b) $V = M(2 \times 2)$ y $W = \{A \in V : a_{11} \in \mathbb{Q}\}$

MATE-1105: Álgebra lineal

Segundo Examen Parcial 202510, Supletorio 28 de mayo de 2025

Nombre: ______________________________ Código: ___________

1	2	3	4	5	6	Σ
						/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cúal es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 03:30-4:50 (80 min).

¡Las matemáticas son la gimnasia del espíritu y una preparación para la filosofía!

13 pts. **Problema 1.** Sea $T : M(2\times 2) \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b-c+3d \\ 2a-b+3c+d \\ 3a+b+2d+4c \end{pmatrix}$$

(a) Muestre que T es lineal.

(b) Calcule $\ker T$, $n(T)$ y $R(T)$.

(c) Encuentre una base para $\operatorname{Im} T$.

5 pts. **Problema 2.** Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta

(a) Sea V un espacio vectorial y $v_1, v_2, v_3 \in V$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Entonces v_1 es combinación lineal de v_2 y v_3.

(b) Si $A \in M(n\times n)$ es antisimétrica y n impar entonces A es no invertible.

(c) Si $A \in M(m\times n)$ y $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ es tal que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución entonces $\vec{b}$ está en el espacio generado por las columnas de A.

8 pts. **Problema 3.** Sea W el espacio de las soluciones del sistema:

$$\begin{aligned} x+3y+3z-w &= 0 \\ 2x+7y+3z+2w &= 0 \end{aligned}$$

(a) Muestre que W es subespacio de $\mathbb{R}^4$.

(b) Encuentre una base y la dimensión de w.

12 pts. **Problema 4.** En $P_3[x]$ considere $U = \operatorname{span}\{u, v, w, r\}$ donde:

$$u(x) = x^3 - x^2 + 2x, \quad v(x) = x^3 + x + 3, \quad w(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 3, \quad r(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

(a) ¿Son u, v, w, r linealmente independientes?. Si no es el caso exhiba una combinación lineal no trivial de u, v, w, r cuyo resultado sea el polinomio cero.

(b) Encuentre una base para U y su dimensión.

(c) Complete la base anterior a una base de todo $P_3[x]$.

$\boxed{\text{7 pts.}}$ **Problema 5.** Suponga que $\det\begin{pmatrix} a & -2b & c \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = -1$. Calcule el determinante de

$$\begin{pmatrix} a & -2b & c \\ 1+2a & 3-4b & -1+2c \\ -a & 5+2b & 2-c \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{5 pts.}}$ **Problema 6.** Determine si W es subespacio del espacio V dado:

(a) $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V : x^2 + y^2 = 1 \right\}$

(b) $V = M(2 \times 2)$ y $W = \{A \in V : a_{11} \leq 0\}$