Álgebra Lineal, Parcial 2
martes 8 de abril de 2025

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permite utilizar notas ni calculadoras ni ningún otro tipo de ayuda. Por favor escriba su nombre en este tema y también en su hoja de examen. Justifique sus respuestas.

1. (a) (5 puntos) Sean N, P matrices de 3×3 tales que $\det(N) = 2$ y $\det P = -1$, Halle $\det(3NPN)$.

   (b) (5 puntos) Sea $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Halle $\det(M)$.

2. Sea $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \; -2x + 2y + z - w = 0 \right\}$.

   (a) (6 puntos) Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

   (b) (6 puntos) Halle una base B de W.

3. Para cada par de matrices (A, B), halle una matriz elemental E tal que $EA = B$. También halle E^{-1}.

   (a) (4 puntos) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

   (b) (4 puntos) $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 2 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

4. Considere las matrices

   $$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   en el espacio $M_{2\times 2}$ de matrices de 2×2.

   (a) (7 puntos) ¿Es cierto que el conjunto $\{T, U, V\}$ es linealmente independiente?

   (b) (3 puntos) ¿Es cierto que el conjunto $\{T, U, V\}$ genera $M_{2\times 2}$?

5. Para cada afirmación, diga si es verdadera o falsa. Si es verdadera, dé una demostración. Si es falsa, dé un contraejemplo.

   (a) (5 puntos) Si S y T son matrices invertibles de $n \times n$, entonces ST también es invertible.

   (b) (5 puntos) Si S y T son matrices invertibles de $n \times n$, entonces $S + T$ también es invertible.