MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL 1 - PARCIAL 2

NOMBRE: ______________________ **CÓDIGO:** ______________________

Este es un examen individual, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.

Ejercicio 1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

(i) El conjunto $H = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ es un subespacio de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(ii) El conjunto $H = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$ es un subespacio de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(iii) 7 vectores de $\mathbb{R}^5$ pueden generar a $\mathbb{R}^5$.

(iv) 7 vectores de $\mathbb{R}^5$ pueden ser linealmente independientes.

Ejercicio 2. Determine si el siguiente conjunto de vectores es una base de $\mathbb{P}_{\leqslant 3}(\mathbb{R})$:

$$\{2x^3 + 2x^2, x + 1, x^3 + x - 2, 3\}.$$

(Ayuda: represente dichos vectores con respecto a la base canónica de $\mathbb{P}_{\leqslant 3}(\mathbb{R})$ y determine si dichos vectores en $\mathbb{R}^4$ forman una base).

Ejercicio 3. Considere las siguientes dos bases de $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\} \text{ y } C = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

(i) Halle la matriz M de cambio de base de B a C.

(ii) Calcule

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}_B$$

(iii) Use los puntos (i) y (ii) para encontrar

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}_C$$

Ejercicio 4. Determine en los siguientes casos si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente:

(1) $\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

(2) $\{x^3 + 3x^2 + x, 2x^3 + x, -x^3 + 2x^2 + x\}$ en $\mathbb{P}_{\leqslant 3}$

(3) En $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $\left\{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Ejercicio extra. Considere el subespacio dado por

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + 3y, x - 2z) = (0, 0)\}$$

Encuentre $\dim(H)$, justificando su respuesta. (No debe mostrar que H es subespacio).