Álgebra Lineal, Parcial 2
martes 22 de octubre de 2024

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permite utilizar notas ni calculadoras ni ningún otro tipo de ayuda. Justifique sus respuestas.

1. Sea P_3 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 4. Sea Y el subespacio de P_3 generado por $\{1 + x^2, 2x - x^3, 3 - 4x + 3x^2 + 2x^3\}$.
   (a) (6 puntos) Halle una base de Y.
   (b) (2 puntos) ¿Cuál es la dimensión de Y?
   (c) (5 puntos) ¿Es cierto que el polinomio $1 + x$ pertenece a Y?

2. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea
$$W = \{f \in V : f(3) = 2f(4)\}.$$
   (a) (7 puntos) Demuestre que W es un subespacio de V.
   (b) (6 puntos) Halle dos elementos de W que son linealmente independientes.

3. Para cada afirmación, diga si es verdadera o falsa. Si es verdadera, dé una demostración. Si es falsa, dé un contraejemplo.
   (a) (3 puntos) Si A es una matriz de 2×2 y ninguna entrada de A es cero, entonces $\det(A) \neq 0$.
   (b) (3 puntos) Cada recta en $\mathbb{R}^3$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
   (c) (3 puntos) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son vectores en un espacio vectorial tales que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente.
   (d) (3 puntos) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ son vectores en un espacio vectorial tales que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente.

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) (8 puntos) Escriba A como un producto de matrices elementales.
   (b) (4 puntos) Calcule $\det(A)$.