Matemáticas 1105, 2023 Semestre II
Examen Parcial 1
26 de octubre, 2023

Duración del examen: 80 minutos

NOMBRE: **CÓDIGO:**

NOMBRE DE SU PROPFESOR DE COMPLEMENTARIA (Julián Calderón, Jacinto Puig, o Juan José Villamarín):

Por favor escriba sus respuestas en una hoja aparte, pero entregue la hoja de los enunciados con la hoja con sus respuestas.

Puntos importantes:

1. Este es un examen individual, y no se permite discutir los problemas con nadie durante la duración del examen (excepto para pedir aclaraciones del profesor o de los asistentes).
2. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: ni notas, ni calculadoras, ni cuadernos, ni aparatos electrónicos, ni teléfonos celulares.
3. Respete el juramento uniandino: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad".
4. Antes de las 12:30 p.m. no se permite voltear esta hoja ni empezar a escribir respuestas.
5. Si no justifique claramente sus respuestas, podríamos bajarle puntos en la calificación.

¡Éxito!

1. (11 puntos)

   (a) Calcule el determinante de la matriz abajo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   (b) ¿Es la matriz A arriba invertible o no? Explique.

   (c) Halle un valor de x que hace que la matriz abajo **no** sea invertible:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -x & 0 & x \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (12 puntos)

   (a) ¿Es el conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \cdot y = z \right\}$$

   un subesapcio de $\mathbb{R}^3$ o no? Explqiue.

   (b) ¿Es el conjunto

$$X = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 \,:\, p(1) = p(2)\}$$

   un subespacio de $\mathcal{P}_3$ (el espacio de polinomios de grado ≤ 3) o no? Explique.

3. (15 puntos)

   (a) Determine si

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

   es una base para $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine si

$$\left\{x^3 - x^2,\ x^2 - x,\ x - 1\right\}$$

   es una base para $\mathcal{P}_3$.

(c) Halle una base para $\mathbb{R}^4$ que contiene el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. (12 puntos) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to M(2,2)$ la función definida por la regla

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ 0 & x-z \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que T es una transformación lineal.

(b) Halle una base para el núcleo (kérnel) de T, y halle la dimensión del núcleo.

(c) Halle una base para la imagen de T, y halle $\dim(\operatorname{im}(T))$.