

Matemáticas 1105, 2023 Semestre II
Examen Parcial 2
SOLUCIONES

1. (a) (6 puntos) Calcule el determinante de la matriz abajo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: La manera más rápida de calcular este determinante es por reducción con operaciones elementales en las filas (como hicimos en clase el 21 de septiembre), así:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R4 \rightarrow R4 - R1)$$

Ahora la segunda matriz es triangular superior, y su determinante es igual al producto de las entradas en su diagonal, así:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ = 6.$$

Por lo tanto, $\det(A) = 6$.

- (b) (1 punto) ¿Es la matriz A arriba invertible o no? Explique.

SOLUCIÓN: Por el Teorema 4 de la clase del 19 de septiembre, la matriz A es invertible si (y solamente si) $\det(A) \neq 0$. Pero acabamos de calcular $\det(A) = 6$, y $6 \neq 0$. Por lo tanto, la matriz A **sí es invertible**.

- (c) (4 puntos) Halle un valor de x que hace que la matriz abajo **no** sea invertible:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -x & 0 & x \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN: Por el Teorema 4 de la clase del 19 de septiembre otra vez, es suficiente hallar un valor de x que hace que el determinante de B sea igual a 0.

Pensando en el proceso que utilizamos en el inciso (a) arriba (y en la solución del 1 (b) del Quiz 3), si podemos escoger x tal que una fila es igual a un múltiple de otra fila, entonces el determinante de B será 0 (pues después de hacer una operación elemental en las filas se puede obtener una fila de todo 0's).

Ahora notemos que x aparece solamente en la segunda fila, $(6, -x, 0, x)$, y que la primera entrada de la segunda fila es el doble de la primera entrada de la primera fila. Por lo tanto, si queremos que

$$(6, -x, 0, x) = c \cdot (3, -1, 0, 1),$$

entonces deberíamos escoger $c = 2$ (para igualar las primeras entradas), y luego comparamos las segundas entradas para obtener

$$-x = -2,$$

es decir, deberíamos escoger $x = 2$. Y en efecto con $x = 2$, la segunda fila se vuelve $(6, -2, 0, 2)$, lo cual es igual a $2 \cdot (3, -1, 0, 1)$.

En resumen: el valor $x = 2$ sirve, porque así

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} && (R2 \rightarrow R2 - R1) \\ &= 0, && \text{por expansión por la Fila 2.} \end{aligned}$$

(Y resulta que $x = 2$ es el **único** valor que sirve.)

2. (a) (6 puntos) ¿Es el conjunto

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x \cdot y = z \right\}$$

un subespacio de \mathbb{R}^3 o no? Explique.

SOLUCIÓN: Para este punto y el próximo, se puede determinar si es un subespacio o no comprobando las tres propiedades necesarias una por una, como en el Teorema 2 de la clase del 28 de septiembre. La propiedad (i) del Teorema 2 dice que para que h sea un subespacio,

es necesario que el vector $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea elemento de H . Esta propiedad sí se cumple, porque en el vector $\vec{0}$, las coordenadas son

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

y en efecto

$$x \cdot y = 0 \cdot 0 = 0 = z.$$

La segunda propiedad necesaria – la propiedad (ii) del Teorema 2 – dice que H tiene que ser cerrado bajo productos escalares. Es decir, si

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H$$

y si c es cualquier número, entonces es necesario que $c \cdot \vec{u}$ sea elemento de H .

Si $\vec{u} \in H$, entonces tenemos que

$$x \cdot y = z. \tag{1}$$

Luego

$$c \cdot \vec{u} = c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \\ c \cdot z \end{pmatrix}.$$

Para que $c \cdot \vec{u}$ sea elemento de H , es necesario que $(c \cdot x) \cdot (c \cdot y) = c \cdot z$, o de manera equivalente, que

$$c^2 \cdot x \cdot y = c \cdot z. \tag{2}$$

Sin embargo, si $c^2 \neq c$ y los números x, y , y z no son iguales a 0, entonces la ecuación (1) arriba no implica la ecuación (2).

Para dar un contraejemplo concreto, podemos escoger los valores $x = 1, y = 1, z = 1$, y $c = -1$. Luego

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y dado que $x \cdot y = 1 = z$, el vector \vec{u} pertenece a H ; pero del otro lado,

$$c \cdot \vec{u} = -\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y este vector **no pertenece** a H , dado que $(-1) \cdot (-1) = 1 \neq -1$.

Por lo tanto, H **no es un subespacio de \mathbb{R}^3** .

(Resulta que la propiedad (iii) del Teorema 2 – de ser cerrado bajo sumas – tampoco se cumple para este conjunto H , aunque no fue necesario mencionar esto si demostró que H no es cerrado bajo productos escálares.)

(b) (6 puntos) ¿Es el conjunto

$$X = \{p(x) \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(2)\}$$

un subespacio de \mathcal{P}_3 (el espacio de polinomios de grado ≤ 3) o no? Explique.

SOLUCIÓN: Otra vez, vamos a mirar a las tres propiedades necesarias (y suficientes) para ser un subespacio del Teorema 2 del 28 de septiembre.

Primero, verificaremos que el vector $\vec{0}$ pertenece a X . En el espacio \mathcal{P}_3 , el vector cero es el “polinomio cero”, es decir, el polinomio $p(x) = 0$ que tiene el valor constante de 0 para todo x . Este polinomio satisface la ecuación

$$p(1) = p(2)$$

dado que $p(1) = 0$ y $p(2) = 0$, y por lo tanto es un elemento de X .

La segunda propiedad para verificar es que si $p(x) \in X$ y c es un escalar, entonces $(c \cdot p)(x) \in X$. Ahora si $p(x) \in X$, eso significa que

$$p(1) = p(2),$$

así que

$$\begin{aligned}
(c \cdot p)(1) &= c \cdot (p(1)) \\
&= c \cdot (p(2)) \\
&= (c \cdot p)(2).
\end{aligned}$$

Por ende, $(c \cdot p)(x)$ es elemento de X también.

Finalmente, nos toca comprobar si X es cerrado bajo sumas. Para esto, supongamos que $p(x) \in X$ y que $q(x) \in X$, así que

$$p(1) = p(2) \quad \text{y} \quad q(1) = q(2).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(p + q)(1) &= p(1) + q(1) \\
&= p(2) + q(2) \\
&= (p + q)(2),
\end{aligned}$$

y por lo tanto $(p + q)(x)$ pertenece a X también.

En resumen: X satisface las tres propiedades del Teorema 2, así que **X sí es un subespacio de \mathcal{P}_3 .**

3. (a) (5 puntos) Determine si

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para \mathbb{R}^3 .

SOLUCIÓN: Vamos a aplicar el Teorema 12 de la clase del 17 de octubre. El conjunto en el enunciado consiste en 3 vectores en \mathbb{R}^3 , entonces si formamos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyas columnas son los tres vectores, entonces el Teorema 12 nos dice que las tres siguientes condiciones son equivalentes: (i) que las columnas son linealmente equivalentes, (ii) que las columnas generan \mathbb{R}^3 , y (iii) que la matriz A tiene 3 pivotes en su forma escalonada. Entonces es suficiente reducir A a una forma escalonada y contar los pivotes: si tiene 3 pivotes, entonces (i) y (ii) se cumplen, y las

columnas forman una base para \mathbb{R}^3 ; y si tiene menos de 3 pivotes, entonces no forman una base.

Ahora

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} && (R2 \rightarrow R2 - 3R1) \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} && (R3 \rightarrow R3 + R1) \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (R3 \rightarrow R3 - R2) \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (R2 \rightarrow \frac{1}{2}R2).
 \end{aligned}$$

La última matriz arriba está en forma escalonada, pero tiene solamente 2 pivotes (en las columnas 1 y 2). Por lo tanto, **los tres vectores del enunciado NO forman una base para \mathbb{R}^3 .**

En la otra versión del examen parcial, los tres vectores eran un poco diferentes, dando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz A arriba se podía reducir a forma escalonada así:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} && (R2 \rightarrow R2 - 3R1) \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} && (R3 \rightarrow R3 + R1) \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} && (R2 \rightarrow \frac{1}{2}R2) \\
 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} && (R3 \rightarrow R3 - 3R2)
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (R3 \rightarrow -\frac{1}{2}R3).$$

Por lo tanto, en la segunda versión del examen, los tres vectores **sí formaban una base para \mathbb{R}^3** .

(b) (5 puntos) Determine si

$$\{x^3 - x^2, x^2 - x, x - 1\}$$

es una base para \mathcal{P}_3 .

SOLUCIÓN: Recuerde que una base para \mathcal{P}_3 es $\{1, x, x^2, x^3\}$. Esta base tiene 4 elementos, así que $\dim(\mathcal{P}_3) = 4$, y cualquier otra base para \mathcal{P}_3 tiene 4 elementos.

Sin embargo, el conjunto en el enunciado tiene solamente 3 elementos, y por lo tanto no puede ser una base para \mathcal{P}_3 . (En efecto, no genera todo \mathcal{P}_3 , a pesar de que es linealmente independiente.)

(c) (5 puntos) Halle una base para \mathbb{R}^4 que contiene el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN: Recuerde que $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, así que cualquier base para \mathbb{R}^4 necesita contener 4 vectores. Aplicando el criterio del Teorema 12 del 17 de octubre, es suficiente hallar una matriz 4×4 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \end{pmatrix}$$

tal que tiene 4 pivotes en su forma escalonada, y luego las 4 columnas de esta matriz formarán una base para \mathbb{R}^4 .

Hay muchas maneras posibles de escoger las entradas “*” para que esto pase. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

lo cual está en forma escalonada con 4 pivotes. Por lo tanto, una respuesta posible a este punto es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow M(2, 2)$ la función definida por la regla

$$T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ 0 & x-z \end{pmatrix}.$$

(a) (4 puntos) Demuestre que T es una transformación lineal.

SOLUCIÓN: Vamos a aplicar la definición de la clase del 19 de octubre. Hay dos condiciones generales para verificar. Primero, si \vec{u} y \vec{v} son cualesquier dos vectores en \mathbb{R}^3 , nos toca comprobar que

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}).$$

Ahora si

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned}T(\vec{u} + \vec{v}) &= T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \\&= T \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} \right) \\&= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) & (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) \\ 0 & (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2) \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 & y_1 + z_1 + y_2 + z_2 \\ 0 & x_1 - z_1 + x_2 - z_2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & y_1 + z_1 \\ 0 & x_1 - z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 & y_2 + z_2 \\ 0 & x_2 - z_2 \end{pmatrix} \\&= T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right) + T \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \\&= T(\vec{u}) + T(\vec{v}),\end{aligned}$$

tal como queríamos.

La segunda propiedad para comprobar es que si \vec{u} es cualquier vector en \mathbb{R}^3 y c es cualquier escalar, entonces

$$T(c \cdot \vec{u}) = c \cdot T(\vec{u}).$$

Sea

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y calculemos:

$$\begin{aligned}
T(c \cdot \vec{u}) &= T\left(c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \\
&= T\left(\begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \\ c \cdot z \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} c \cdot x + c \cdot y & c \cdot y + c \cdot z \\ 0 & c \cdot x - c \cdot z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c \cdot (x + y) & c \cdot (y + z) \\ 0 & c \cdot (x - z) \end{pmatrix} \\
&= c \cdot \begin{pmatrix} x + y & y + z \\ 0 & x - z \end{pmatrix} \\
&= c \cdot T(\vec{u}),
\end{aligned}$$

tal como queríamos.

- (b) (4 puntos) Halle una base para el núcleo (kernel) de T , y halle la dimensión del núcleo.

SOLUCIÓN: Un vector

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

está en el núcleo de T si, y solamente si,

$$T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, cuando

$$\begin{pmatrix} x + y & y + z \\ 0 & x - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comparando las entradas de las matrices, esto se cumple justo cuando

$$x + y = 0,$$

$$y + z = 0,$$

y

$$x - z = 0.$$

Las tres ecuaciones arriba forman un sistema lineal homogéneo con 3 variables, y se puede solucionar por métodos de la clase. Por ejemplo, su matriz aumentada es

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

La última matriz arriba está en forma escalonada reducida, con dos pivotes. Se nota que hay una variable libre, z , porque no hay pivote en la columna que corresponde a z , y la solución general es:

$$x = z, \quad y = -z.$$

Con esto, se ve que el conjunto de soluciones al sistema (lo cual es igual al núcleo de T) es

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\begin{array}{c} z \\ -z \\ z \end{array} \right) : z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = \left\{ z \cdot \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) : z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = \text{gen} \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una base para el núcleo de T es

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

y la dimensión del núcleo de T es 1.

(c) (4 puntos) Halle una base para la imagen de T , y halle $\dim(\text{im}(T))$.

SOLUCIÓN: Primero, notemos que la imagen de T consiste en **algunas** de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde a, b , y c son cualesquier tres números reales, dado que un valor $T(\vec{u})$ tiene que tener una entrada de 0 en la esquina inferior-izquierda, así que tiene que ser de la forma en (3) arriba.

Del otro lado, dados valores a, b , y c en \mathbb{R} , si queremos que

$$T(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ 0 & x-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

entonces los valores de x, y , y z necesitan formar una solución al sistema lineal

$$x + y = a,$$

$$y + z = b,$$

$$x - z = c.$$

La matriz aumentada de este sistema es

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & b+c-a \end{array} \right). \end{aligned}$$

La matriz arriba va a tener un pivote en la esquina inferior-derecha a menos que la entrada $b+c-a$ es igual a 0, así que la imagen de T consiste en todas las matrices de la forma en (3) tales que $b+c-a=0$, o

$$a = b + c. \quad (4)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{im}(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} b+c & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Además, las dos matrices en el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son linealmente independientes, así que forman una base para $\text{im}(T)$.

Dado que esta base tiene 2 elementos, $\dim(\text{im}(T)) = 2$.