Álgebra Lineal, Parcial 1
martes 9 de septiembre de 2025

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permite utilizar notas ni calculadoras ni ningún otro tipo de ayuda. Por favor escriba su nombre en este tema y también en su hoja de examen. Justifique sus respuestas.

1. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) (10 puntos) Halla A^{-1}.
   (b) (3 puntos) Resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

2. Considere el sistema lineal
$$\begin{cases} \quad x_2 \quad = t \\ x_1 \quad + x_3 = t^2 \\ \quad x_2 \quad = t^3 \\ \quad\quad x_3 = t^4 \end{cases}$$
   que depende de un parámetro t.
   (a) (2 puntos) Escriba la matriz aumentada que representa el sistema.
   (b) (6 puntos) Halle la forma escalonada reducida de la matriz. (Su respuesta dependerá del valor de t.)
   (c) (5 puntos) Halle los valores de t tal que el sistema es consistente, y halle una solución para cada uno de estos valores.

3. Sea E el plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene los puntos $(2, 0, 1)$, $(3, 1, 5)$ y $(4, 0, 6)$.
   (a) (5 puntos) Halle una ecuación de E en la forma $ax + by + cz = d$.
   (b) (3 puntos) Halle ecuaciones paramétricas de una recta R que pasa por el origen y es perpendicular a E.
   (c) (4 puntos) Halle ecuaciones paramétricas de una recta L que pasa por el origen y no se interseca con E.

4. Para cada afirmación, diga si es verdadera o falsa. Si es verdadera, dé una demostración. Si es falsa, dé un contraejemplo.
   (a) (3 puntos) Para todos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$.
   (b) (3 puntos) Para todos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$ y todo número real α, $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$.
   (c) (3 puntos) Para toda matriz A de 2×3, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones.
   (d) (3 puntos) Para toda matriz A de 3×3, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una única solución.