MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL 1 - PARCIAL 1

NOMBRE: ____________________ **CÓDIGO:** ____________________

Este es un examen individual, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.

Para los ejercicios 1 y 2 considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

(a) (5 pts) $AB = \begin{pmatrix} 14 & -11 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

(b) (5 pts) la ecuación matricial $(AB)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

(c) (5 pts) $\det(C^T D^{-1}) = 1$.

Ejercicio 2.

(1) (6 pts) Muestre que la matriz C es invertible y encuentre su inversa.

(2) (4 pts) Utilizando la inversa (NO Gauss-Jordan), resuelva la ecuación matricial

$$C\vec{x} = \vec{b}$$

con $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 3. (8pts) Encuentre todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales en variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 &= 0 \\ x_4 + x_5 + 2x_6 &= 0 \\ x_3 + x_5 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Considere los puntos

$$P = (1, 1, 1) \qquad Q = (-2, 0, -2) \qquad R = (1, 2, 0).$$

(1) (7pts) Encuentre la ecuación del plano π que pasa por dichos puntos.

(2) (2pts) Encuentre un punto S que NO esté en el plano π.

(3) (4pts) Encuentre el área del triángulo $\triangle PQR$.

(4) (4pts) Encuentre el punto de intersección U del plano π y la recta con ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio extra. (2 pts) Sea $A = (a_{ij})$ una matriz diagonal de $n \times n$ tal que $a_{ii} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Muestre que A^{-1} existe y corresponde a la matriz $A^{-1} = (c_{ij})$ con $c_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $c_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$.

Hoja auxiliar de cálculos