**SOLUCIÓN PARCIAL 1** **ÁLGEBRA LINEAL**
**Universidad de los Andes** **27 de febrero de 2025**

**Nombre:** ______________________________ **Código:** ____________________

**Duración: 80 minutos**

**Ejercicio 1. [10 pts, 5 c/u]**

(a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta $\ell$ formada por la intersección de los planos $x + 2y + 2z = 1$ y $x + z = 0$.

(b) Determine la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta $\ell$ y pasa por el punto $A = (1, 0, 0)$.

**Solución 1.** (a) Para encontrar los puntos que están en los dos planos resolveremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Usando Gauss-Jordan tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, la ecuación paramétrica de la recta $\ell$ formada por la intersección de los planos es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -t \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

(b) Vamos a determinar la ecuación de $\mathcal{P}$ utilizando tres puntos. Uno de estos puntos es $A = (1, 0, 0)$, y los otros puntos se obtendrán de la ecuación de la recta $\ell$ al reemplazar el parámetro $t$ por los valores $t = 0$ y $t = 1$:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad B = (x, y, z) = \left(-0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0, 0\right) = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad C = (x, y, z) = (-1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1, 1) = (-1, 0, 1)$$

Con esta información, podemos obtener los vectores $\boldsymbol{u} = B - A = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) - (1,0,0) = \left(-1, \frac{1}{2}, 0\right)$ y $\boldsymbol{v} = C - A = (-1,0,1) - (1,0,0) = (-2,0,1)$, que son paralelos al plano $\mathcal{P}$. Así, para obtener el vector normal a $\mathcal{P}$, hacemos:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \cdot \frac{1}{2} - \boldsymbol{j}(-1) + \boldsymbol{k}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Con esta información, la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ sería:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \Rightarrow \quad & \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \bullet (x-1, y-0, z-0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2}(x-1) + 1(y-0) + \frac{1}{2}(z-0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + y + \frac{1}{2}z = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad & x + 2y + z = 1. \end{aligned}$$

**Ejercicio 2. [12 pts, 6 c/u]** Sea $A$ la matriz dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Encuentre el determinante de la matriz $A$.

(b) Determine el valor de la variable $\boldsymbol{y}$ en la solución del siguiente sistema de ecuaciones. Describa precisamente el método que va a utilizar.

$$\begin{cases} x + y + w & = 3 \\ x + y + z & = 0 \\ y + z + w & = 1 \\ x + z + w & = 0 \end{cases}$$

**Solución 2.** **NOTA: La solución de este ejercicio puede parecer larga, pero tengan en cuenta que escribiré diferentes formas en las que se pueden obtener las soluciones**.

**(a)** Se puede calcular el determinante por expansión en cofactores:

$$\begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 0^{+} & 1^{-} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 0^{+} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 0^{+} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1^{+} & 1 & 1 \\ 0^{-} & 1 & 1 \\ 1^{+} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &= 1(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 0 - 1(-1)) - 1(1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= 1(0-1) - 1(0+1) - 1(1+0) = -1 - 1 - 1 = -3. \end{aligned}$$

Otra forma de calcular el determinante es usar reducción:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (-R_1 + R_2 \to R_2 \ \ ; \ \ -R_1 + R_4 \to R_4)$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (R_2 \leftrightarrow R_3) \quad = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (-R_2 + R_4 \to R_4)$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (-2R_3 + R_4 \to R_4) \quad = (-1) \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3) = -3.$$

**(b)** Podemos resolver el sistema de ecuaciones utilizando **reducción de Gauss-Jordan**:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 + 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 - 2 \cdot 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 + 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right]$$

De esta forma, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = -\frac{5}{3}$, $w = \frac{4}{3}$, y en particular $y = \frac{4}{3}$.

También podríamos resolver este ejercicio usando la **Regla de Cramer**. En primer lugar, tenemos que $y$ es la segunda variable, y en la parte (a) calculamos que

$\det(A) = -3$. Además,

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1^{+} & \mathbf{3}^{-} & 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{0}^{+} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}^{-} & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0}^{+} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \left( 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) - 1 \left( 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -3(1 \cdot 0 + 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -3(1) - 1(1) = -3 - 1 = -4.$$

Así, $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$.

**Ejercicio 3.** **[12 pts]** Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(a) **[8 pts]** Encuentre la inversa de la matriz $A$, justificando completamente su respuesta.

(b) **[4 pts]** Utilice $A^{-1}$ para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y & = 1 \\ 2x - 3y + z & = 2 \\ 2y + z & = 1 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} -3x_1 + x_3 & = 1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 & = 1 \end{cases}$$

**Solución 3.**

**(a)** **NOTA: De nuevo, aquí mostraremos varios métodos.**

Si utilizamos reducción de Gauss-Jordan para calcular la inversa tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Así, la inversa de $A$ es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

También podemos utilizar la fórmula de la matriz adjunta: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$.

Los cofactores de la matriz $A$ son:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

El determinante de la matriz $A$ es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1^{+} & -3^{-} & 0^{+} \\ 2 & -3 & 1^{-} \\ 0 & 2 & 1^{+} \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 1.$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\,\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. (Recuerde que la adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores).

**(b)** Para el primer sistema de ecuaciones, la matriz del coeficientes es justamente la matriz $A$, por lo que al escribir en forma matricial y multiplicar por $A^{-1}$ tendríamos:

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6-3 \\ -2+2-1 \\ 4-4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

por lo que la solución de este sistema es $x = -2, y = -1, z = 3$.

Para el segundo sistema de ecuaciones, observe que si reescribimos el sistema con el orden de variables $x_3, x_1, x_2$, tendríamos:

$$\begin{cases} x_3 - 3x_1 + 0 \cdot x_2 & = 1 \\ 2x_3 - 3x_1 + x_2 & = 0 \\ 0 \cdot x_3 + 2x_1 + x_2 & = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-3 \\ -2-1 \\ 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Así, la solución del sistema es $x_1 = -3, x_2 = 7, x_3 = -8$.

**Ejercicio 4. [16 pts] Verdadero-Falso**. Diga si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Justifique claramente **dos** de sus decisiones.

**Solución 4.**

(i) **La recta $\ell$ con ecuaciones**

$$\begin{aligned} x &= \phantom{-}1 + \phantom{2}t \\ y &= \phantom{-}2 - 2t \\ z &= -1 + \phantom{2}t \end{aligned}$$

**está contenida en el plano que pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y cuyo vector normal es $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.**

**VERDADERO.** Note que el punto $(1, 2, -1)$ está en la recta (cuando $t = 0$), y además el vector dirección de la recta es $\boldsymbol{v} = (1, -2, 1)$, y es perpendicular al vector normal del plano $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (1, 1, 1)$ ya que

$$\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{v} = (1, 1, 1) \bullet (1, 2, -1) = 1 + 2 - 1 = 0.$$

(ii) **Si $A$ es una matriz de tamaño $n \times n$ y $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x} = 0$.**

**FALSO.** Por ejemplo, para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tenemos que

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 1 \\ 2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{pero} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}.$$

(iii) **Si $A, B$ son matrices de tamaño $2 \times 2$ con $\det(A) = 3$ y $\det(B^{-1}) = 5$, entonces**

$$\det(3AB^T) = \frac{27}{5}.$$

**VERDADERO.** Por propiedades del determinante, si $\det(B^{-1}) = 5$ tenemos que $\det(B) = \dfrac{1}{\det(B^{-1})} = \dfrac{1}{5}$. Así, dado que las matrices son de tamaño $2 \times 2$, tenemos que

$$\det(3AB^T) = 3^2 \cdot \det(A) \cdot \det(B^T) = 3^2 \cdot \det(A) \cdot \det(B) = 9 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{27}{5}.$$

(iv) **El área del triángulo en $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices están dados por los puntos $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 2, -1)$ y $C = (3, 0, -1)$ es $4$ unidades cuadradas.**

**FALSO.** Recordemos que el área del paralelogramo con dos vértices adyacentes $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ está dada por $A = ||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||$. Así, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo con vectores adyacentes

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= B - A = (2, 2, -1) - (1, 0, -1) = (1, 2, 0) \qquad \text{y} \\ \boldsymbol{v} &= C - A = (3, 0, -1) - (1, 0, -1) = (2, 0, 0). \end{aligned}$$

De esta manera, el área del triángulo es:

$$\begin{aligned} \text{Área del triángulo} &= \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|\right| = \frac{1}{2}||\boldsymbol{i}(0) - \boldsymbol{j}(0) + \boldsymbol{k}(-4)|| \\ &= \frac{1}{2}||(0, 0, 4)|| = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

(v) **Existen infinitos valores reales de $\alpha$ para los cuales la matriz**

$$\begin{bmatrix} 3-\alpha & \alpha-7 & \alpha+10 \\ 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

**es invertible.**

**FALSO.** Utilizando reducción por filas tenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3-\alpha & \alpha-7 & \alpha+10 \\ 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3-\alpha & \alpha-7 & \alpha+10 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Con esto, podemos concluír que no hay ningún valor real de $\alpha$ para el cual la matriz sea invertible.

**PARCIAL 1** | **ÁLGEBRA LINEAL**
**Universidad de los Andes** | **27 de febrero de 2025**
**Profesor: Darío García** | **Monitora: Nataly Reyes**

**Nombre:** ______________________________ **Código:**____________________

**Duración: 80 minutos**

| |
|---|
| Comprendo que la evaluación es una oportunidad para demostrar lo que he aprendido y para recibir retroalimentación sobre qué y cómo puedo mejorar mi proceso de aprendizaje. Me comprometo a responder la siguiente evaluación honrando los valores Uniandinos de excelencia e integridad, dando cuenta de mi esfuerzo personal y mis aprendizajes y siguiendo de buena fe las instrucciones que he recibido para su realización. |
| ✗ Respaldo esta declaración **[2 pts]** |

## Ejercicio 5. [10 pts, 5 c/u]

(a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta $\ell$ formada por la intersección de los planos $x + 2y + 2z = 1$ y $x + y = 0$.

(b) Determine la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta $\ell$ y pasa por el punto $A = (1, 0, 0)$.

**Solución 5.** (a) Para encontrar los puntos que están en los dos planos resolveremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Usando Gauss-Jordan tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2z = -1 \\ y + 2z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2z \\ 1 - 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, la ecuaciación paramétrica de la recta $\ell$ formada por la intersección de los planos es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

(b) Vamos a determinar la ecuación de $\mathcal{P}$ utilizando tres puntos. Uno de estos puntos es $A = (1, 0, 0)$, y los otros puntos se obtendrán de la ecuación de la recta $\ell$ al reemplazar el parámetro $t$ por los valores $t = 0$ y $t = 1$:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = (x, y, z) = (-1 + 2 \cdot 0, 1 - 2 \cdot 0, 0) = (-1, 1, 0) \\ t = 1 \quad &\Rightarrow \quad C = (x, y, z) = (-1 + 2 \cdot 1, 1 - 2 \cdot 1, 1) = (1, -1, 1) \end{aligned}$$

Con esta información, podemos obtener los vectores $\boldsymbol{u} = B - A = (-1, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-2, 1, 0)$ y $\boldsymbol{v} = C - A = (1, -1, 1) - (1, 0, 0) = (0, -1, 1)$, que son paralelos al plano $\mathcal{P}$. Así, para obtener el vector normal a $\mathcal{P}$, hacemos:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(1) - \boldsymbol{j}(-2) + \boldsymbol{k}(2) = (1, 2, 2).$$

Con esta información, la ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ sería:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \Rightarrow \quad & (1, 2, 2) \bullet (x - 1, y - 0, z - 0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & 1(x - 1) + 2(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \\ \Rightarrow \quad & x - 1 + 2y + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 2z = 1 \end{aligned}$$

**Ejercicio 6. [12 pts, 6 c/u]** Sea $A$ la matriz dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Encuentre el determinante de la matriz $A$.

(b) Determine el valor de la variable $\boldsymbol{y}$ en la solución del siguiente sistema de ecuaciones. Describa precisamente el método que va a utilizar.

$$\begin{cases} x + y + z &= 3 \\ x + y + w &= 0 \\ y + z + w &= 1 \\ x + z + w &= 0 \end{cases}$$

**Solución 6. NOTA: La solución de este ejercicio puede parecer larga, pero tengan en cuenta que escribiré diferentes formas en las que se pueden obtener las soluciones**.

**(a)** Se puede calcular el determinante por expansión en cofactores:

$$
\begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & 1^{+} & 0^{-} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}
= 1 \begin{vmatrix} 1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}
- 1 \begin{vmatrix} 1^{+} & 0^{-} & 1^{+} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
+ 1 \begin{vmatrix} 1^{+} & 1 & 1 \\ 0^{-} & 1 & 1 \\ 1^{+} & 0 & 1 \end{vmatrix}
- 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) + 1\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&= 1(1 \cdot 0 + 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot 0 + 1(-1)) + 1(1 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\
&= 1(0+1) - 1(0-1) + 1(1+0) = 1 + 1 + 1 = 3.
\end{aligned}
$$

Otra forma de calcular el determinante es usar reducción:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (R_1 \leftrightarrow R_2)
$$

$$
= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (-R_1 + R_2 \to R_2 \ \ ; \ \ -R_1 + R_4 \to R_4)
$$

$$
= (-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (R_2 \leftrightarrow R_3) \quad = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (-R_2 + R_4 \to R_4)
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (-2R_3 + R_4 \to R_4) \quad = (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3) = 3.
$$

**(b)** Podemos resolver el sistema de ecuaciones utiliando **reducción de Gauss-Jordan**:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2-5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2+2\cdot 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3-5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5/3 \end{array}\right]$$

De esta forma, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{4}{3}$, $w = -\frac{5}{3}$, y en particular $y = \frac{4}{3}$.

También podríamos resolver este ejercicio usando la **Regla de Cramer**. En primer lugar, tenemos que $y$ es la segunda variable, y en la parte (a) calculamos que $\det(A) = 3$. Además,

$$\begin{aligned} \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1^{+} & \mathbf{3}^{-} & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0}^{+} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1}^{-} & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0}^{+} & 1 & 1 \end{vmatrix} &= -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3\left(1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) \\ &= -3(1\cdot 0 + 1\cdot(-1)) - 1(1\cdot(-1) - 1\cdot 0) = -3(-1) - 1(-1) = 3+1 = 4. \end{aligned}$$

Así, $y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{4}{3}$.

**Ejercicio 7.** [**12 pts**] Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(a) [**8 pts**] Encuentre la inversa de la matriz $A$, justificando completamente su respuesta.

(b) [**4 pts**] Utilice $A^{-1}$ para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y &= 1 \\ 2x - 3y + z &= 2 \\ 2y + z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3x_1 + x_3 &= 1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{cases}$$

**Solución 7.**

**(a)** **NOTA: De nuevo, aquí mostraremos varios métodos.**

Si utilizamos reducción de Gauss-Jordan para calcular la inversa tenemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

Así, la inversa de $A$ es $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

También podemos utilizar la fórmula de la matriz adjunta: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$.

Los cofactores de la matriz $A$ son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

El determinante de la matriz $A$ es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1^{+} & -3^{-} & 0^{+} \\ 2 & -3 & 1^{-} \\ 0 & 2 & 1^{+} \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 1.$$

Por lo tanto, $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. (Recuerde que la adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores).

**(b)** Para el primer sistema de ecuaciones, la matriz del coeficientes es justamente la matriz $A$, por lo que al escribir en forma matricial y multiplicar por $A^{-1}$ tendríamos:

$$A \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1} \cdot \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+6-3 \\ -2+2-1 \\ 4-4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

por lo que la solución de este sistema es $x = -2, y = -2, z = 3$.

Para el segundo sistema de ecuaciones, observe que si reescribimos el sistema con el orden de variables $x_3, x_1, x_2$, tendríamos:

$$\begin{cases} x_3 - 3x_1 + 0 \cdot x_2 & = 1 \\ 2x_3 - 3x_1 + x_2 & = 0 \\ 0 \cdot x_3 + 2x_1 + x_2 & = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-3 \\ -2-1 \\ 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Así, la solución del sistema es $x_1 = -3, x_2 = 7, x_3 = -8$.

**Ejercicio 8. [16 pts] Verdadero-Falso**. Diga si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Justifique claramente **dos** de sus decisiones.

**Solución 8.** (i) **La recta $\ell$ con ecuaciones**

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - 2t \\ z &= -1 + t \end{aligned}$$

**está contenida en el plano que pasa por el punto $(1, 2, -1)$ y cuyo vector normal es $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.**

**VERDADERO.** Note que el punto $(1, 2, -1)$ está en la recta (cuando $t = 0$), y además el vector dirección de la recta es $\boldsymbol{v} = (1, -2, 1)$, y es perpendicular al vector normal del plano $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (1, 1, 1)$ ya que

$$\boldsymbol{n} \bullet \boldsymbol{v} = (1, 1, 1) \bullet (1, 2, -1) = 1 + 2 - 1 = 0.$$

(ii) **Si $A$ es una matriz invertible de tamaño $n \times n$ y $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ entonces $\boldsymbol{x} = 0$.**

**VERDADERO.** Si $A$ es invertible y $A \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, podemos multiplicar por la matriz inversa y obtener $A^{-1} \cdot A\boldsymbol{x} = A^{-1}\mathbf{0}$, lo que implica que $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

(iii) **Si $A, B$ son matrices de tamaño $2 \times 2$ con $\det(A) = 3$ y $\det(B^{-1}) = 5$, entonces**

$$\det(3AB^T) = \frac{27}{5}.$$

**VERDADERO.** Por propiedades del determinante, si $\det(B^{-1}) = 5$ tenemos que $\det(B) = \dfrac{1}{\det(B^{-1})} = \dfrac{1}{5}$. Así, dado que las matrices son de tamaño $2 \times 2$, tenemos que

$$\det(3AB^T) = 3^2 \cdot \det(A) \cdot \det(B^T) = 3^2 \cdot \det(A) \cdot \det(B) = 9 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{27}{5}.$$

(iv) **El área del triángulo en $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices están dados por los puntos $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 2, -1)$ y $C = (3, 0, -1)$ es $2$ unidades cuadradas.**

**VERDADERO.** Recordemos que el área del paralelogramo con dos vértices adyacentes $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ está dada por $A = ||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||$. Así, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo con vectores adyacentes

$$\boldsymbol{u} = B - A = (2, 2, -1) - (1, 0, -1) = (1, 2, 0) \qquad \text{y}$$
$$\boldsymbol{v} = C - A = (3, 0, -1) - (1, 0, -1) = (2, 0, 0).$$

De esta manera, el área del triángulo es:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = \frac{1}{2}\left|\left|\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right|\right| = \frac{1}{2}||\boldsymbol{i}(0) - \boldsymbol{j}(0) + \boldsymbol{k}(-4)||$$
$$= \frac{1}{2}||(0, 0, 4)|| = \frac{4}{2} = 2.$$

(v) **Existen infinitos valores reales de $\alpha$ para los cuales la matriz $\begin{bmatrix} 3-\alpha & \alpha-7 & \alpha+10 \\ 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$ es invertible.**

**FALSO.** Utilizando reducción por filas tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3-\alpha & \alpha-7 & \alpha+10 \\ 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3-\alpha & \alpha-7 & \alpha+10 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con esto, podemos concluír que no hay ningún valor real de $\alpha$ para el cual la matriz sea invertible.