

## Primer Examen Parcial 202420, 28 de febrero de 2025

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
						/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 03:30-4:50 (80 min).

**¡La belleza de las matemáticas reside en su elegancia y simplicidad! D. Hilbert**

8 pts. **Problema 1.** Sean  $E : x + 2y - z = 2$ ,  $F : 2x + y - 5z = 16$

- Encuentre una dirección paralela a ambos planos  $E, F$ .
- Muestre que el punto  $(1, -1, -3)$  pertenece a  $E \cap F$ .
- Encuentre una ecuación vectorial de  $E \cap F$ .
- Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

12 pts. **Problema 2.** En  $\mathbb{R}^3$ , sea  $L$  la recta con ecuación simétrica:

$$x - 3 = \frac{y - 4}{2}, \quad z = -1$$

y  $G$  la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 5 + t \\ y &= -1 - t \\ z &= 2 + t \end{aligned}$$

- Encuentre  $L \cap G$ .
- Encuentre la distancia del origen a la recta  $L$  (Hint: Encuentre un punto  $P$  en la recta tal que  $\overrightarrow{OP} \perp v$  donde  $O$  es el origen y  $v$  es el vector director de  $L$ ).
- Determine la ecuación cartesiana de un plano  $F$  que contenga simultáneamente a las rectas  $L, G$ .

12 pts. **Problema 3.** Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 7 & 9 \\ 4 & -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

- Determine todas las soluciones del sistema anterior.
- Encuentre una solución del sistema anterior con primera coordenada igual a 1.

(c) Escriba todas las soluciones del sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 7 & 9 \\ 4 & -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}.$$

13 pts. **Problema 4.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 3 & 10 & -3 \end{pmatrix}$

(a) Muestre que  $A$  es invertible y calcule  $A^{-1}$ .

(b) Encuentre la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5 pts. **Problema 5.** Sean  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ . Encuentre  $X \in M(2 \times 2)$  que satisfice la ecuación

$$AX - 3AB = C - 2X.$$

7 pts. **Problema 6. Bono:** Sean  $B \in M(6 \times 5)$  y  $C \in M(5 \times 6)$ . Muestre que  $BC$  no puede ser una matriz invertible.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>El bono solo tiene validez para este parcial, la nota del parcial no excede bajo ningún caso los 50 puntos.

## Primer Examen Parcial 202420, 28 de febrero de 2025

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	$\Sigma$
						/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 03:30-4:50 (80 min).

**¡La belleza de las matemáticas reside en su elegancia y simplicidad! D. Hilbert**

8 pts. **Problema 1.** Sean  $E : 3x + 2y + z = 5$ ,  $F : 2x - y + 3z = 1$

- Encuentre una dirección paralela a ambos planos  $E, F$ .
- Muestre que el punto  $(1, 1, 0)$  pertenece a  $E \cap F$ .
- Encuentre una ecuación vectorial de  $E \cap F$ .
- Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

12 pts. **Problema 2.** En  $\mathbb{R}^3$ , sea  $L$  la recta con ecuación simétrica:

$$x = \frac{z}{2}, \quad y = 1$$

y  $G$  la recta con ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= -1 + t \\ z &= t \end{aligned}$$

- Encuentre  $L \cap G$ .
- Determine la distancia del origen a la recta  $L$  (Hint: Encuentre un punto  $P$  en la recta tal que  $\overrightarrow{OP} \perp v$  donde  $O$  es el origen y  $v$  es el vector director de  $L$ ).
- Encuentre la ecuación cartesiana de un plano  $F$  que contenga simultáneamente a las rectas  $L, G$ .

12 pts. **Problema 3.** Considere el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 10 & 15 & -7 \\ -5 & -17 & -25 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- Determine todas las soluciones del sistema anterior.
- Encuentre una solución del sistema anterior con primera coordenada igual a 2.

(c) Encuentre todas las soluciones del sistema homogéneo asociado a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 10 & 15 & -7 \\ -5 & -17 & -25 & 12 \end{pmatrix}.$$

13 pts. **Problema 4.** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

(a) Muestre que  $A$  es invertible y calcule  $A^{-1}$ .

(b) Encuentre la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad A\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5 pts. **Problema 5.** Sean  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Encuentre  $X \in M(2 \times 2)$  que satisfice la ecuación

$$XA - BA = C + 3X.$$

7 pts. **Problema 6. Bono:** Sea  $A \in M(6 \times 6)$  no invertible. Demuestre que existe  $B \in M(6 \times 6)$ ,  $B \neq \mathbb{O}_{6 \times 6}$  tal que  $BA = \mathbb{O}_{6 \times 6}$ .<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>El bono solo tiene validez para este parcial, la nota del parcial no excede bajo ningún caso los 50 puntos.