Álgebra Lineal, Parcial 1
martes 25 de febrero de 2025

Instrucciones: Este examen es de *80 minutos.* No se permite utilizar notas ni calculadoras ni ningún otro tipo de ayuda. Por favor escriba su nombre en este tema y también en su hoja de examen. Justifique sus respuestas.

1. Considere los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^4$.
   (a) (4 puntos) Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$.
   (b) (4 puntos) Halle todos los vectores $\mathbf{w}$ en $\mathbb{R}^4$ tales que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \mathbf{0}$.
   (c) (4 puntos) ¿Existe un vector $\mathbf{y}$ tal que $\text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{y} = \mathbf{v}$? ¿Por qué o por qué no?

2. Sea L la recta dada por las ecuaciones paramétricas $x = -2 + 3s$, $y = 1 + 3s$, $z = 1 + s$ y M la recta dada por $x = -1 + t$, $y = 4$, $z = t$.
   (a) (6 puntos) Halle un punto donde las rectas L y M se intersecan.
   (b) (7 puntos) Halle la ecuación de un plano que contiene ambas rectas. (Su ecuación debe ser de la forma $ax + by + cz = d$.)

3. Considere el sistema
$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 \phantom{{}-x_5} = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$
   (a) (2 puntos) Escriba la matriz aumentada que representa el sistema.
   (b) (6 puntos) Calcule la forma escalonada reducida de su matriz aumentada
   (c) (3 puntos) Halle la solución general del sistema.
   (d) (2 puntos) Halle cuatro soluciones particulares del sistema

4. Para cada afirmación, diga si es verdadera o falsa. Si es verdadera, dé una demostración. Si es falsa, dé un contraejemplo.
   (a) (4 puntos) Si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y c es un número real, entonces
$$c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}.$$
   (b) (4 puntos) Todo sistema de dos ecuaciones lineales en tres variables tiene infinitas soluciones.
   (c) (4 puntos) Si $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ son vectores en $\mathbb{R}^2$ tales que $\|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{z}\|$, entonces los dos vectores son paralelos.